Chapitre 16

Espaces vectoriels

Historique

Ce sont Arthur Cayley (1821-1895) et Hermann Grassmann (1809-1877) qui ont les premiers utilisé la notion d'espace vectoriel à n dimensions. En 1844, Grassmann parle "d'espace linéaire" et définit la notion de sous espace et de dimension. En 1862, il en connait les propriétés principales. C'est Peano en 1888 qui donnera des espaces vectoriels la définition axiomatique que nous connaissons aujourd'hui.

16.1 Espace vectoriel

16.1.1 Définition

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (on notera $\mathbb{R}$ ev) est un ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\times$ qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication par un réel, dans l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace (commutativité de $+$ et $\times$, associativité, distributivité....).

La définition qui suit ne sera pas utilisée par la suite et il suffit de retenir que les éléments de E s'appellent des vecteurs et ont les mêmes propriétés que les vecteurs du plan ou de l'espace. Sauf mention contraire, nous tavaillerons uniquement sur des espaces de dimension finie.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ (appelé ensemble des scalaires) représentera un corps commutatif, souvent $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Nous ne mettrons pas (toujours) de flèches sur les vecteurs et il faudra faire très attention à ne confondre ceux-ci avec les éléments de $\mathbb{K}$. Les éléments de E sont des vecteurs.

Définition 53

Un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est la donnée $(E, +, \times)$ d'un ensemble E muni d'une opération interne $+$ et d'une opération externe $\times$ de $E \times \mathbb{K} \to E$ telles que:
- $(E, +)$ *est un groupe commutatif*
- $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ x, y\ \in E,\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x\ \in E,\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ x\ \in E,\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- $\forall x\ \in E,\ 1 \times x = x$

Exemples:

• **Ex1:** $\mathbb{R}^2$ ensemble des vecteurs du plan muni des opérations usuelles
Si u et v sont deux vecteurs du plan, il suffit d'utiliser la règle du parallélogramme ou la relation de Chasles pour construire $u + v$. Pour un réel λ, le vecteur λu a la même direction que u, le même sens si $\lambda > 0$ (le sens contraire sinon) et une norme multipliée par $|\lambda|$. On vérifie alors que ces deux opérations possèdent toutes les propriétés ci-dessus.

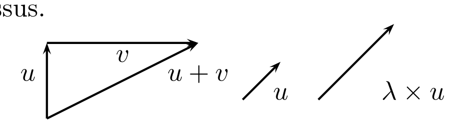

Figure 16.1: $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}^2$

• **Ex2:** $\mathbb{R}^3$ ensemble des vecteurs de l'espace, muni des opérations usuelles.
Cet exemple prolonge le précédent.

• **Ex3:** $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels, muni de $+$ et $\times$ classiques.
Un nombre réel peut donc être considéré comme un vecteur. Sa représentation peut se faire sur une droite graduée Δ, un nombre x étant représenté par un vecteur dont la direction est celle de Δ, la norme est $|x|$ et le sens est donné par le signe de x.

• **Ex4:** $M_{n,p}(\mathbb{R})$ ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefs dans $\mathbb{R}$ muni de $+$ et de la $\times$ par un scalaire.

• **Ex5:** $\mathbb{R}_n[x]$ ensemble des polynômes de degré $\leq n$ muni des opérations usuelles.
Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ et $Q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$, alors

$(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$

De même, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + ... + \lambda a_n x^n$

Ces opérations font de $\mathbb{R}_n[x]$ un $\mathbb{R}$ ev.

• **Ex6:** $\mathcal{F}$ ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles.
Soient $f : x \longrightarrow f(x)$ et $g : x \longrightarrow g(x)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
On définit la somme de ces deux fonctions comme étant la fonction $f + g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à un réel x associe $f(x) + g(x)$. De la même façon, si $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est la fonction qui à un réel x associe le nombre $\lambda f(x)$. On vérifie facilement que ces deux opérations font de $\mathcal{F}$ un $\mathbb{R}$ ev.

• **Ex7:** $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes, muni de $+$ et $\times$, est un $\mathbb{R}$ ev.

• **Ex8:** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites numériques muni des opérations usuelles, est un $\mathbb{R}$ ev.

DÉFINITION 54

Un sous espace vectoriel F de E est un sous groupe commutatif stable par $\times$

$F \neq \emptyset$ est un sous espace vectoriel de E $\iff$ $\forall x, y \in F,\ \lambda \in \mathbb{K},\ x + y \in F$ et $\lambda x \in F$

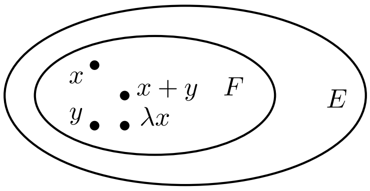

Figure 16.2: F Sous-espace vectoriel de E

Un sous-espace vectoriel est donc un sous-ensemble non vide stable par addition et multiplication par un réel. Nous noterons sev pour sous-espace vectoriel.

Exemples:

• **Ex1:** L'ensemble F des vecteurs du plan colinéaires à un vecteur a donné (différent du vecteur nul) est un sev de $\mathbb{R}^2$.

• **Ex3:** L'ensemble réduit à $\{0\}$ est un sev de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

• **Ex4:** L'ensemble $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ des matrices symétriques de taille $n \times n$ est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de l'ensemble des matrices carrées $(M_n(\mathbb{R}), +, \times)$. En effet, il est non vide (la matrice identité y est), la somme de deux matrices symétriques est symétrique et le produit d'une matrice symétrique par un réel est symétrique.

De la même façon, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures, ou diagonales) est un sev de l'ensemble des matrices de même taille.

L'ensemble $(GL_n(\mathbb{R}), +, \times)$ des matrices inversibles de taille $n \times n$ **n'est pas** un sev de $(M_n(\mathbb{R}), +\times)$ car la somme de deux matrices inversibles n'est pas forcément inversible.

• **Ex5:** $(\mathbb{R}_{n-1}[x], +, \times)$ ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$, est un sev de $(\mathbb{R}_n[x], +, \times)$.

• **Ex6:** L'ensemble $C^2(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ est un sev de l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions de classe C^2 qui sont nulles en 0 est un sev de $C^2(\mathbb{R})$ et donc aussi de $\mathcal{F}$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est un sev de $C^2(\mathbb{R})$

• **Ex7:** $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-espace vectoriel réel de $(\mathbb{C}, +, \times)$

16.1.2 Base et dimension d'un espace vectoriel

Nous commencerons ce paragraphe par quelques rappels sur la notion (fondamentale pour cette leçon) d'indépendance linéaire:

2 vecteurs x et y sont linéairement indépendants (on dira également libres) s'ils sont non colinéaires:
$y = \lambda x \Rightarrow \lambda = 0$

3 vecteurs x, y, z sont linéairement indépendants s'ils sont non coplanaires:
$z = \lambda x + \mu y \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

n vecteurs $x_1, x_2, .., x_n$ sont linéairement indépendants ssi:
$x_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{n-1} x_{n-1} \Rightarrow \lambda_k = 0 \ \forall k = 1, ..., n-1$

Autrement dit, des vecteurs sont libres si on ne peut exprimer l'un d'eux comme une combinaison linéaire des autres.

Une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ est une expression de la forme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$

Une combinaison linéaire de n vecteurs de E est un vecteur de E.

L'ensemble des combinaisons linéaires de n vecteurs $e_1, ..., e_n$ est un sous-espace vectoriel de E noté $\text{vect}\{e_1, ..., e_n\}$. On dit qu'il est engendré par la famille $e_1, ..., e_n$ ou également que la famille $e_1, ..., e_n$ est génératrice de E.

DÉFINITION 55

$e_1, e_2, ..., e_n$ forment une base de E si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon **unique** *sous la forme $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$*

Les $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ s'appellent les coordonnées de x dans la base $e_1, e_2, ..., e_n$

THÉORÈME 62 (DE LA DIMENSION)

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie E ont le même nombre de vecteurs: c'est la dimension de E

DÉMO
C'est un théorème difficile que nous admettons. La dimension d'un ev peut se voir comme le nombre de coefficients indépendants nécessaires pour décrire un vecteur de l'espace en question, ou également comme le nombre de degrés de liberté dont on dispose dans cet espace.
□

Exemples:

• **Ex1:** $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2; une base est donné par n'importe quel couple $\{i, j\}$ de vecteurs non colinéaires et on a alors $i(1, 0)$ et $j(0, 1)$ de sorte que u a pour coordonnées (x, y) dans la base $\{i, j\}$ ssi $u = xi + yj$

• **Ex2:** $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3; une base est donnée par n'importe quel triplet $\{i, j, k\}$ de vecteurs non coplanaires et on a alors $i(1, 0, 0)$, $j(0, 1, 0)$ et $k(0, 0, 1)$

• **Ex3:** $\mathbb{R}$ est de dimension 1; une base est donnée par n'importe quel réel non nul x. Un réel non nul y aura pour coordonnée dans la base $\{x\}$ le nombre $\lambda = y/x$ car $y = y/x \times x$

• **Ex4:** $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 et une base est donnée par les quatre matrices $\{M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}\}$ avec $M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $M = aM_{11} + bM_{12} + cM_{21} + dM_{22}$

De façon plus générale, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels est de dimension $n \times p$; une base est donnée par l'ensemble des matrices élémentaires M_{ij} avec un seul 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et des 0 ailleurs.

• **Ex5:** $\mathbb{R}_n[x]$ est de dim $n+1$; une base est formée des polynômes $1, x, x^2, ..., x^n$ et tout polynôme s'écrit bien sûr de façon unique sous la forme $a_0 \times 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

• **Ex6:** $\mathcal{F}$ n'a pas de base finie. On dit qu'il est de dimension infinie. De même, $C^2(\mathbb{R})$ est de dimension infinie. Par contre, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est un sev de dimension 2 de l'espace précédent. Une base est donnée par le couple de fonctions $\{\sin(\omega x), \cos(\omega x)\}$

• **Ex7:** $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 et de base $\{1, i\}$, par exemple.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Une famille de n vecteurs est une base de E si et seulement si elle est libre. Toute famille de plus de n vecteurs est liée.

On dit qu'une famille de vecteurs $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est génératrice d'un espace vectoriel si tout vecteur de cet espace s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille (cf. plus haut). Contrairement à la définition d'une base, on ne suppose plus que l'écriture est unique (on ne suppose pas, en outre, que la famille est libre). La proposition qui suit (admise) précise le lien entre famille libre et famille génératrice.

Propriété 56

Une base de E est une famille à la fois libre et génératrice de E

Toute famille contenant le vecteur nul est liée. Si l'on ajoute un vecteur à une famille liée, on obtient encore une famille liée. Une base est une famille libre maximale pour la relation d'inclusion. C'est également une famille génératrice minimale pour la relation d'inclusion.

Considérons un espace E de dimension n. Alors toute famille libre a au plus n éléments et toute famille liée a au moins n éléments.

Propriété 57

Soit F un sev de E
Si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$

16.1.3 Application linéaire

Définition 56

Soient E et F deux espaces vectoriels
Une application $u : E \longrightarrow F$ est linéaire si
$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ u(x+y) = u(x) + u(y)$ *et* $u(\lambda x) = \lambda u(x)$

Une application linéaire est une application qui respecte les deux opérations $+$ et $\times$ de l'ev. On peut dire aussi que $+$ et $\times$ « passent au travers » de l'application.

Exemples:

• **Ex1:** $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & u(x,y) = (x,0) \end{array}$
est linéaire; c'est la projection vectorielle sur l'axe (Ox)

• **Ex2:** $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & u(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array}$
est linéaire; c'est la rotation de centre O et d'angle θ

En effet, considérons l'image des vecteurs i et j par une rotation de centre O et angle θ. On a $u(i) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $u(j) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ de sorte qu'un vecteur $X(x,y) = xi + yj$ a pour image, par linéarité de u, $u(X) = xu(i) + yu(j)$ qui est donné par la formule ci-dessus.

• **Ex3:** $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$
est linéaire (et se représente d'ailleurs par une droite). Le terme application linéaire provient de cet exemple. Les lignes passant par 0 sont les seules applications linéaires de $\mathbb{R}$. Elles servent de support aux phénomènes de proportionnalité.

• **Ex4:** $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & u(x,y,z) = (kx, ky, kz) \end{array}$
est linéaire; c'est l'homothétie de centre O et rapport k

• **Ex5:** $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & u(x,y,z) = (2x - y + z, x + y + z) \end{array}$

est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. Ceci se démontre facilement en constatant que les coordonnées de l'image sont des combinaisons linéaires des coordonnées du vecteur initial.

• **Ex6:** $\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[x] \\ P & \longmapsto & d(P) = P' \end{array}$
qui à un polynôme associe sa dérivée, est linéaire.

• **Ex7:** $\begin{array}{rcl} \tau : M_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{p,n}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \tau(M) = {}^tM \end{array}$
qui à une matrice associe sa transposée, est linéaire;

• **Ex8:** $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z = a + ib & \longmapsto & (a, b) \end{array}$
qui à un complexe associe son image dans le plan, est linéaire de l'ev $\mathbb{C}$ vers l'ev $\mathbb{R}^2$.

Définition 57

Si $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, on pose:
$\ker u = \{x \in E / \ u(x) = 0\}$ *appelé noyau de u*
Im $u = \{y \in F / \ \exists x \in E, y = u(x)\}$ *appelé image de u*

$\ker u$ et Im u sont des sous espaces vectoriels respectivement de E et F

Le rang d'une application linéaire est $\boxed{rg(u) = \dim \mathrm{Im}(u)}$

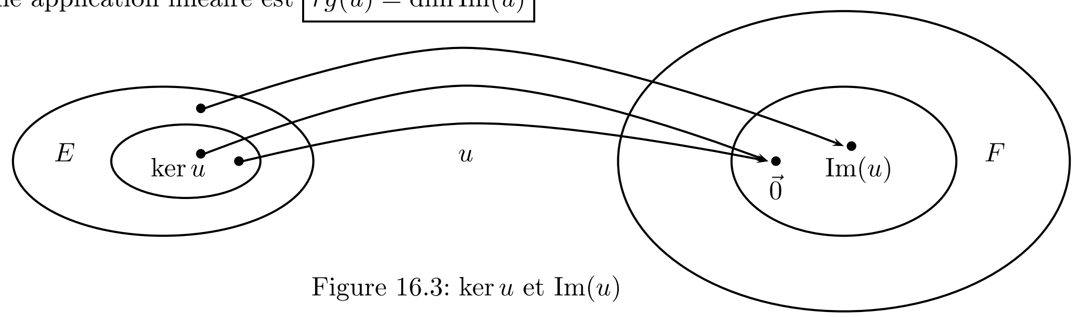

Figure 16.3: $\ker u$ et $\mathrm{Im}(u)$

Exemples:

• **Ex1:** Soit $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & u(x, y) = (x, 0) \end{array}$
la projection sur l'axe (Ox)
$\ker u = \{(x, y)/x = 0\}$ est l'ensemble des vecteurs de direction (Oy)
Im $u = \{(x, y)/y = 0\}$ est l'ensemble des vecteurs de direction (Ox)

• **Ex2:** Soit $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & u(x, y) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$

la rotation d'angle θ. $\ker u = \{\vec{o}\}$ et Im $u = \mathbb{R}^2$

• **Ex3:** $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & u(x, y, z) = (kx, ky, kz) \end{array}$
$u(x, y, z) = 0 \iff x = y = 0$. $\ker u = \{\vec{o}\}$ et Im $u = \mathbb{R}^3$

• **Ex4:** Soit $\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & d(P) = P' \end{array}$

$d(P) = 0$ ssi $P' = k$, ie si P est une constante (un polynôme de degré 0). Ainsi, $\ker d = \mathbb{R}$ ensemble des polynômes de degré 0. De même, la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n - 1$ et n'importe quel polynôme de degré $n - 1$ est obtenu ainsi. On a donc Im $d = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

16.2 Matrice d'une application linéaire

16.2.1 Généralités

Soit E un ev de dimension p dont une base est $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$
Soit F un ev de dimension n dont une base est $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$
Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

$u(e_1), u(e_2), ..., u(e_p)$ sont des vecteurs de F et peuvent s'exprimer en fonction de $e'_1, e'_2, ..., e'_n$
Notons alors $(a_{ij})_{i=1,..,n}$ les coordonnées de $u(e_j)$ dans cette base:

$$y_j = u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i \text{ pour } j = 1, ..., p$$

DÉFINITION 58

La matrice de u relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ est la matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in \ M_{n,p}(\mathbb{R})$

C'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $u(e_1), u(e_2), ..., u(e_p)$ exprimées dans la base $\mathcal{E}'$. C'est donc la matrice des images de la base de départ exprimées dans la base d'arrivée.

Considérons trois ev E, F, G munis de base respectives $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ et considérons également trois applications linéaires u, v, w définies comme suit:

$u : E \longrightarrow F$ a pour matrice $A = (a_{i,j})$ relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$
$v : E \longrightarrow F$ a pour matrice $A' = (a'_{i,j})$ relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$
$w : F \longrightarrow G$ a pour matrice $B = (b_{i,j})$ relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$

PROPRIÉTÉ 58

- *$u + v$ a pour matrice $A + A'$*
- *λu a pour matrice λA, $\lambda \in \mathbb{R}$*
- *$w \circ u$ a pour matrice $B \times A$*

DÉMO
De façon évidente, $(u + v)(e_j) = u(e_j) + v(e_j)$ et $(\lambda u)(e_j) = \lambda u(e_j)\ \forall j = 1, ..., p$
Ce qui démontre les deux premières assertions. Pour la troisième:
$w \circ u(e_j) = w(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w(e'_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} a_{ij} b_{jk} e''_k$
Ce qui correspond bien à la colonne j de la matrice $B \times A$
□

Exemples

- **Ex1:** Soit $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & u(x, y) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$

u est la rotation d'angle θ.
On a $u(i) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $u(j) = (-\sin\theta, \cos\theta) \ \Rightarrow\ A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

- **Ex2:** Soit $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & u(x, y) = (x, 0) \end{array}$

u est la projection vectorielle sur (Ox).
On a $u(i) = i$ et $u(j) = 0 \ \Rightarrow\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Ex3:** Soit $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & u(x, y) = (kx, ky) \end{array}$

u est l'homothétie de centre O et rapport k.
On a $u(i) = ki$ et $u(j) = kj \ \Rightarrow\ A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k \times \text{id}$

- **Ex4:**

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & u(x, y, z) = (2x + y + z, x - y + z, x + y - 2z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = AX \end{array}$$

- **Ex5:** $\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & u(x, y, z) = (2x - y + z, x + y + z) \end{array}$

Le calcul de $u(i)$, $u(j)$ et $u(k)$ donne $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Fixons maintenant deux bases quelconques de E et F et examinons un cas particulier important de la propriété précédente.

Propriété 59 (Produit d'une matrice par un vecteur)

Soit u une application linéaire de matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Soit x un vecteur dont les coordonnées dans la base de E est donnée par la matrice $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

Alors $u(x)$ est un vecteur dont les coordonnées sont données par la matrice $AX \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

Notons $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. C'est un espace vectoriel pour les opérations $+$ et $\times$ usuelles. C'est aussi un sous espace vectoriel des fonctions de E dans F.

Les résultats précédents montrent qu'à partir du moment où l'on a choisi des bases dans les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, se donner une application linéaire revient à se donner une matrice. A chaque application linéaire correspond donc une unique matrice. Dit autrement, ceci signifie que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & A \end{array}$$

qui à une application linéaire u associe sa matrice A relativement aux bases fixées, est bijective. C'est par ailleurs une application... linéaire entre l'espace des applications linéaires et l'espaces des matrices de taille $n \times p$.

application linéaire u	$\longleftrightarrow$	matrice A
vecteur x	$\longleftrightarrow$	matrice colonne X
image $u(x)$	$\longleftrightarrow$	matrice colonne AX
$u+v$	$\longleftrightarrow$	$A+A'$
λu	$\longleftrightarrow$	λA
$w \circ u$	$\longleftrightarrow$	BA
u^{-1} réciproque de u	$\longleftrightarrow$	A^{-1}

16.2.2 Sous espaces vectoriels et dimension

Une droite vectorielle est un ev de dimension 1. C'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur donné. Un plan vectoriel est un ev de dimension 2. C'est l'ensemble des vecteurs coplanaires à deux vecteurs donnés.

Exemples:

- **Ex1:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\ker A = \{0\}$ qui est un ev de dim 0
- **Ex2:** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\ker A = \{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\} = xb$ avec $b(1,1)$. C'est une droite vectorielle
- **Ex3:** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Posons $F = \{(x,y,z)/\ 2x+y-z=0\} = \{(x,y,2x+y)\}, x,y \in \mathbb{R}$
F est un ev de dimension 2 dont une base est donnée par $a(1,0,2)$ et $b(0,1,1)$.
Tout vecteur u de F s'écrit de façon unique $u = xa + yb$
$\ker A = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z)/x=y=z\}$ est une droite vectorielle

- **Ex4:** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Posons $F = \{(x,y,z)/\ 2x+y-z=0\} = \{(x,y,2x+y)\}, x,y \in \mathbb{R}$
F est un ev de dimension 2 dont une base est donnée par $a(1,0,2)$ et $b(0,1,1)$.
Tout vecteur u de F s'écrit de façon unique $u = xa + yb$
$\ker A = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z)/x=y=z\}$ est une droite vectorielle

Une droite se caractérise par une relation liant les 3 coordonnées, un plan par une relation liant 2 des 3 coordonnées. Une relation est une contrainte qui fait perdre un degré de liberté.

Théorème 63 (Théorème du noyau image)

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors
$\dim E = \dim \ker u + \dim Im(u)$

Démo
Admis
□

une application $u : E \longrightarrow F$ est :

injective	ssi	$\forall x, y \in E,\ u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$
surjective	ssi	$u(E) = F$
bijective	ssi	elle est à la fois injective et surjective

Théorème 64

Soit u une application linéaire de E dans F
u injective $\iff \ker u = \{o\}$
u surjective $\iff rg(u) = \dim F \iff Im\ u = F$
u bijective $\iff \dim E = \dim F$

Démo
$\ker u = \{0\} \;\Rightarrow\; \dim E = \dim Im(u) \;\Rightarrow\; u(E) = F$ donc u est surjective
Par ailleurs, $u(x) = u(y) \;\Rightarrow\; u(x - y) = 0 \;\Rightarrow\; x - y \in ker(u) \;\Rightarrow\; x = y \;\Rightarrow\; u$ injective
La réciproque est évidente: u bijective $\Rightarrow$ u injective $\Rightarrow$ $ker(u) = \{0\}$
□

Si $\dim E = \dim F$ et u est linéaire, alors injective $\iff$ surjective $\iff$ bijective.

Une application linéaire bijective s'appelle un isomorphisme d'espace vectoriel. Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base par cette application est également une base.

la dimension d'un sous espace est inférieure ou égale à la dimension de l'espace ambiant:

$A \subset B$ et A sous espace vectoriel de $B \Rightarrow \dim A \leq \dim B$

16.2.3 Changement de base

Soit $u : E \longrightarrow E$ une application linéaire dans un ev E de base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans $\mathcal{E}$
Soit $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ une autre base de E

Théorème 65

La matrice B de u dans la base $\mathcal{E}'$ est $\boxed{B = P^{-1}AP}$
P est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$
Ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ exprimés dans la base $\mathcal{E}$

Démo
Admis
□

• **Ex1:** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et soient deux vecteurs $a(1, 1)$ et $b(1, -1)$

$\{a, b\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ de matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base canonique $\{i, j\}$
La matrice de u dans cette nouvelle base est donc :

$B = P^{-1}AP = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

• **Ex2:** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose $a(1, 1, 1)$, $b(1, 0, -1)$ et $c(0, 1, -1)$. Déterminer la matrice D de u dans la base $\{a, b, c\}$

Changement de coordonnées pour un vecteur

Soit $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coord sont donnés dans $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.
Soit $X'(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ le même vecteur dont les coord sont exprimées dans $\mathcal{E}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$.
Soit $P = (p_{ij})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{E}'$.

Alors on a $\boxed{X = PX'}$

Démo

On a, par définition, $x'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \ \forall j = 1, ..., n$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$

$$\sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x'_j e_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j) e_i \ \Rightarrow \ x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \ \Rightarrow \ X = PX'$$

$\square$

Ex: Soit $x(1, 0, 2)$ dans la base (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$

Posons $e_1(1, 1, 0)$, $e_2(-1, 1, 0)$ et $e_3(1, 0, 1)$
Ces trois vecteurs forment une base de l'espace dont la matrice de passage vers $\{i, j, k\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ On a } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ X' = P^{-1} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, x a pour coordonnées $(-1, 1, 4)$ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

16.3 Application à la mécanique du solide

A compléter.

Un mathématicien et un physicien assistent à une conférence sur la théorie des cordes en dimension 9.
Le physicien se tourne vers le mathématicien:
Je ne comprends rien, dit il. Comment fais tu pour visualiser des phénomènes en dimension 9 ?
Ben, c'est simple, tu le visualises en dimension n, et après tu poses n égal 9.

Qu'est ce qu'un Kinder Surprise sans jouet dedans ?
C'est un Kinder bijectif, car son noyau est réduit à 0.