MATHEMATIQUES CR N°4 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 10 points.

Déterminer la nature des séries numériques de terme général :

Sauf mention contraire, toutes les séries sont à termes positifs et l'on peut donc appliquer les critères. $\boxed{\text{1 point}}$

1°. Appliquons le critère de Cauchy : $u_n^{1/n} = e^{-1} < 1$ donc $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $u_n = n^2 e^{-n}$. Comme $n^4 e^{-n}$ tend vers 0 en l'infini, $\exists N / \ \forall n \geq N \ u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$
D'après le critère de comparaison, comme $\sum(1/n^2)$ converge, il en va de même de la série $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $u_n = \dfrac{n}{n^3 + 3n - 1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et d'après le critère d'équivalence la série converge donc. $\boxed{\text{1 point}}$

4°. Appliquons le critère de D'Alembert :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^n} = (1 + \dfrac{1}{n})^n \to e > 1$
Donc $\sum u_n$ diverge. $\boxed{\text{2 points}}$

5°. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
Il s'agit d'une série alternée avec $1/\sqrt{n} \geq 0$, décroissant et qui tend vers 0. Le critère spécial des séries alternées s'applique donc et $\sum u_n$ CV. $\boxed{\text{1 point}}$

6°. $u_n = (-1)^n \cos \dfrac{1}{n}$
Le terme général de cette série n'a pas de limite en l'infini. En particulier, il ne tend pas vers 0 et donc $\sum u_n$ diverge. $\boxed{\text{1 point}}$

7°. $u_n = \dfrac{\text{sh}n}{\text{ch}^2 n}$
Posons $f(x) = \dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}^2 x}$. Une primitive de cette fonction est $F(x) = \dfrac{-1}{\text{ch}x}$ qui tend vers 0 en l'infini. D'après le critère de comparaison à une intégrale (la fonction est positive, décroissante pour x assez grand), $\sum u_n$ CV. $\boxed{\text{2 points}}$

II. 10 points.

On considère la fonction 2π-périodique, impaire, définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

1°. Donner l'allure de sa courbre représentative.

C'est une fonction en dent de scie (que je ne reproduis pas ici) $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Par imparité, $a_n = 0 \ \forall n$ et
$b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = -2 \dfrac{(-1)^n}{n}$ en intégrant par parties. $\boxed{\text{2.5 points}}$

3°. Etudier la convergence de la série numérique de terme général $u_k = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ puis appliquer, en justifiant, le théorème de Dirichlet pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

C'est une série alternée convergente $\boxed{\text{1 point}}$

Le théorème de Dirichlet s'applique car la fonction f est de classe C^1 par morceaux ; en particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{1 point}}$

Appliquons le théorème de Dirichlet en $x = \pi/2$ (ailleurs il donne $0 = 0$). $\sin(n\pi/2) = 0$ pour les termes pairs et ± 1 pour les autres. On peut donc ré-indexer la série en posant $n = 2k + 1$. On trouve alors

$$S(\pi/2) = f(\pi/2) \iff 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \ \boxed{\text{2.5 points}}$$

4°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en justifiant de sa convergence.

L'énergie du signal vaut $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$. D'après le théorème de Parseval, $\dfrac{\pi^2}{3} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ ce que nous savions déjà... $\boxed{\text{2 points}}$