MATHEMATIQUES CR N°4

R&T Saint-Malo - 1ère année - Lundi 31 Mars - 2007/2008 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Déterminer la nature des séries numériques de terme général donné par :

1°. e^{-n^2} 2°. $\dfrac{n^3}{n!}$ 3°. $(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$ 4°. $\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+3n-1}$ 5°. $\dfrac{1}{n\ln n}$ 6°. $\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

II. 12 points.

On considère la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x(2\pi - x)$

1°. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

2°. Déterminer ses coefficients de Fourier et démontrer que sa série de Fourier $S(x)$ s'écrit

$$S(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

3°. La fonction vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?

4°. Appliquer le théorème de Dirichlet pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en justifiant sa convergence.

5°. Appliquer le théorème de Dirichlet pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, en justifiant sa convergence.

6°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, en justifiant sa convergence.