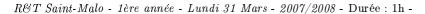
MATHEMATIQUES CR N°4







Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices non autorisées. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Déterminer la nature des séries numériques de terme général donné par :

$$1^{\circ}. e^{-n^{2}} \quad 2^{\circ}. \frac{n^{3}}{n!} \quad 3^{\circ}. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^{2}} \quad 4^{\circ}. \frac{\sqrt{n}}{n^{2} + 3n - 1} \quad 5^{\circ}. \frac{1}{n \ln n} \quad 6^{\circ}. \frac{(-1)^{n}}{n \ln n}$$

II. 12 points.

On considère la fonction 2π -périodique définie sur l'intervalle $[0,2\pi]$ par $f(x)=x(2\pi-x)$

- 1°. Tracer l'allure de sa courbe représentative.
- 2° . Déterminer ses coefficients de Fourier et démontrer que sa série de Fourier S(x) s'écrit

$$S(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

- 3°. La fonction vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet?
- 4°. Appliquer le théorème de Dirichlet pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en justifiant sa convergence.
- 5°. Appliquer le théorème de Dirichlet pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, en justifiant sa convergence.
- 6°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, en justifiant sa convergence.