MATHEMATIQUES CR N°4 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année - Lundi 31 Mars - 2007/2008 -

Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Déterminer la nature des séries numériques de terme général donné par :

Toutes ces séries sont à termes positifs et l'on peut donc appliquer les critères $\boxed{\text{0,5 point}}$

1°. e^{-n^2}

On applique le critère de Cauchy : $u_n^{1/n} = e^{-n} \to 0 < 1$ et donc $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\dfrac{n^3}{n!}$

On applique le critère de D'Alembert $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^3}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^3} = \dfrac{(n+1)^2}{n^3}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par suite, $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1,5 points}}$

3°. $(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$

On applique le critère de Cauchy : $u_n^{1/n} = (1+1/n)^n$. Il s'agit d'une forme indéterminée et pour calculer sa limite il faut passer à la forme exponentielle : $(1+1/n)^n = \exp(n\ln(1+1/n))$ qui tend vers $e > 1$. Par suite, $\sum u_n$ DV $\boxed{\text{1,5 point}}$

4°. $\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+3n-1}$

Appliquons le critère d'équivalence : $u_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$ qui est de la forme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Par suite $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

5°. $\dfrac{1}{n\ln n}$

Appliquons le critère de comparaison à une intégrale. La fonction $u(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ est positive, décroissante et tend vers 0 en l'infini. Par ailleurs, sa primitive est $U(x) = \ln\ln x$ qui tend vers l'infini en l'infini. Par suite, $\sum u_n$ DV $\boxed{\text{1,5 point}}$

6°. $\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

Il s'agit d'une série alternée dont le terme général est de la forme $(-1)^n v_n$ avec $v_n = \frac{1}{n\ln n}$. Cette suite est clairement positive, décroissante et tend vers 0. Le critère spécial des séries alternées permet donc de conclure que $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

II. 12 points.

On considère la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x(2\pi - x)$

1°. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

Il s'agit d'un arc de parabole renversé, sur l'intervalle considéré. Il passe par 0 en 0 et 2π. On translate cet arc pour obtenir la courbe qui ressemble à une suite d'arcades $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer ses coefficients de Fourier et démontrer que sa série de Fourier $S(x)$ s'écrit

$$S(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Comme f est paire, $b_n = 0\ \forall n$ $\boxed{\text{0,5 point}}$

Par ailleurs, $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$ $\boxed{\text{1,5 point}}$ et après calculs, $a_n = -\dfrac{4}{n^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$.

3°. La fonction vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?

Oui ! Car elle admet en tout point une demi-dérivée à droite et à gauche (en plus elle est continue) $\boxed{\text{0,5 point}}$

4°. Appliquer le théorème de Dirichlet pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, en justifiant sa convergence.

On applique le théorème en $x = 0$. Il vient

$$f(0) = S(0) \iff 0 = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

La série converge par ailleurs, car le terme général est de la forme $\sum 1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

5°. Appliquer le théorème de Dirichlet pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, en justifiant sa convergence.

On applique le théorème en $x = \pi$. Il vient

$$f(\pi) = S(\pi) \iff \pi^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

La série converge par ailleurs, car le terme général est celui d'une série alternée convergente $\boxed{\text{0,5 point}}$

6°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4}$, en justifiant sa convergence.

Après un calcul classique, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$

$\boxed{\text{2 points}}$