MATHEMATIQUES CR N°5 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2006/2007 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

Orthographe et clarté de la présentation : $\boxed{\text{1 point}}$

I. 10 points.

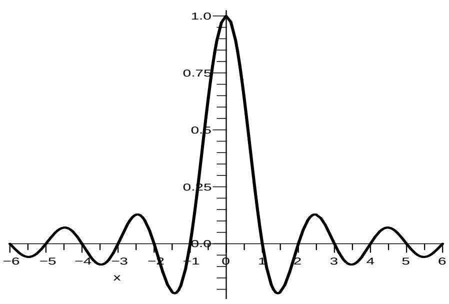
Soit $\alpha > 0$.

Soient $\pi(t) = 1_{[-1/2,1/2]}(t)$, $f(t) = e^{-\alpha t}1_{[0,+\infty[}(t)$,
$g(t) = te^{-\alpha t}1_{[0,+\infty[}(t)$ et $h(t) = \dfrac{t^2}{2}e^{-\alpha t}1_{[0,+\infty[}(t)$

1°. Calculer explicitement $\hat{\pi}(u)$ et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Un calcul que nous avons fait mille fois en cours et en TD donne $\hat{\pi}(u) = \dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

Il s'agit d'un sinus cardinal dont la courbe est donnée ci-dessous $\boxed{\text{1 point}}$.



2°. Calculer explicitement $\hat{f}(u)$.

Un calcul que nous avons fait mille fois donne
$\hat{f}(u) = \dfrac{1}{\alpha + 2\pi i u}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. Exprimer $g(t)$ en fonction de $f(t)$ et en déduire $\hat{g}(u)$, puis $\hat{h}(u)$.

$g(t) = tf(t)$ de sorte qu'en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier, on a :
$\hat{g}(u) = \dfrac{-1}{2\pi i} \times \dfrac{d}{du}\hat{f}(u) = \dfrac{1}{(\alpha + 2\pi i u)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

De la même façon, $h(t) = \dfrac{1}{2}tg(t)$ et donc
$\hat{h}(u) = \dfrac{1}{(\alpha + 2\pi i u)^3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4°. A l'aide des questions précédentes, déterminer $f \star g(t)$

Nous voyons que $\hat{f}(u) \times \hat{g}(u) = \hat{h}(u)$
D'après les propriétés de la transformation de Fourier (en particulier, elle transforme un produit normal en produit de convolution et vice-versa) on en déduit immédiatement que $f \star g(t) = h(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

5°. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$

Nous passons à la transformée de Fourier dans les deux membres de l'équation : $2\pi i u\hat{y}(u) + \alpha\hat{y}(u) = \dfrac{1}{\alpha + 2\pi i u}$
$\Rightarrow \hat{y}(u) = \hat{g}(u)$ et donc $y(t) = g(t)$ qui est la solution
$\boxed{\text{2 points}}$

II. 10 points.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1°. Calculer P^2, P^3 et montrer que $P^3 + P^2 - 5P = I$.

$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 13 & -15 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$

On en déduit la relation demandée $\boxed{\text{1 point}}$

2°. En déduire l'expression de P^{-1}.

$P(P^2 + P - 5I) = I$ et donc $P^{-1} = P^2 + P - 5I$ ie
$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$.

3°. Calculer $D = P^{-1}AP$.

Le calcul donne $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4°. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

5°. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire A^n.

$A^n = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times ... \times PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$
$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 4(2^n - 1) & 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

6°. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x + z = -11 \\ x + 2y - 2z = 50 \end{cases}$$

Le système s'exprime sous la forme $PX = B$ et sa solution (unique) est $X = P^{-1}B$.
Ainsi, $\mathcal{S} = \{(2, 11, -13)\}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$