MATHEMATIQUES CR N°5 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - Vendredi 02 Mai - 2007/2008

- Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.
La notation prendra en compte la présentation et la qualité de la rédaction.

I. 8 points.

1°. Soit $f(t) = \frac{1}{2\epsilon} \times 1\!\!1_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)$ pour $\epsilon > 0$.

Calculer explicitement $\hat{f}(u)$ et en déduire la transformée de Fourier de la masse de Dirac $\delta(t)$.

$\hat{f}(u) = \frac{\sin(2\pi u\epsilon)}{2\pi u\epsilon}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

Quand ϵ tend vers 0, la règle de l'Hospital montre que la limite vaut 1. Ainsi, $\hat{\delta}(u) = 1$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. Soit $g(t) = e^{-|t|}$ et $h(t) = e^{-\omega|t|}$ pour $\omega > 0$

$\hat{g}(u) = \frac{2}{1+(2\pi u)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Comme $h(t) = g(\omega t)$ alors $\hat{h}(u) = \frac{1}{\omega}\hat{g}(\frac{u}{\omega}) = \frac{2\omega}{\omega^2+(2\pi u)^2}$

$\boxed{\text{1 point}}$

3°. Résoudre l'équation différentielle
$y''(t) - \omega^2 y(t) = 2\omega\ \delta(t)$

En passant à la transfo de Fourier, l'équation devient
$-(2\pi u)^2\hat{y}(u) - \omega^2\hat{y}(u) = 2\omega$
$\Rightarrow \hat{y}(u) = -\hat{h}(u) \Rightarrow y(t) = -h(t)$ $\boxed{\text{3 points}}$

II. 12 points.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1°. Calculer A^2, A^3 et démontrer que
$A^3 - 4A^2 + A + 6I = 0$
En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 0 & 9 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 19 & -19 \\ 0 & 27 & -28 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

On voit alors que $A^3 - 4A^2 + A = -6I$ d'où la relation demandée $\boxed{\text{1 point}}$

Par ailleurs,
$A(A^2 - 4A + I) = -6I \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 4A + I)$

$\boxed{\text{1 point}}$

2°. Démontrer que $Q = P^{-1}$: Il suffit de constater que $PQ = I$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $D = Q \times A \times P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. Démontrer à l'aide de la relation précédente que $A = P \times D \times Q$

$D = QAP \iff PDQ = PQAPQ$ en $\times$ à gauche par P et à droite par Q
$\Rightarrow PDQ = IAI = A$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

5°. En déduire que $A^n = P \times D^n \times Q$ pour $n \in \mathbb{N}$

$A^n = PDQ \times PDQ \times ... \times PDQ = PD^nQ$ car $QP = I$
$\boxed{\text{1.5 points}}$

6°. Calculer D^n et en déduire A^n

On voit facilement que $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{1 point}}$

Alors $A^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 3^n & -3^n + (-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$