**MATHEMATIQUES CR N°3**

*R&T Saint-Malo - 2nde année - 2006/2007* - Durée : 1h -

*Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.*
*Calculatrices interdites.*
*Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.*

**I.** 6 points.

Déterminer les extrema des fonctions ci-dessous :

1°. $f(x,y) = xy$
2°. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x$

**II.** 3 points.

Soit $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x^2})$

1°. Déterminer le domaine de définition de $f$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

2°. En déduire que $f(x,y)$ est solution de l'équation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

**III.** 3 points.

Soit $\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

1°. Déterminer le domaine de définition de $\phi$ et exprimer $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ en fonction de $\phi$.

2°. En déduire que $\phi(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

**IV.** 5 points.

Soient $\mathcal{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ et $\mathcal{C} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ (1-u)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1°. Tracer rapidement les ensembles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé du plan.
2°. Déterminer la matrice jacobienne $J_\phi(u,v)$ de $\phi$ ainsi que son déterminant.
3°. Démontrer que $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$
4°. En exprimant $u$ et $v$ en fonction de $x$ et $y$, déduire l'expression de la réciproque $\psi(x,y)$ de la fonction $\phi$.
5°. Calculer div $\phi$ en un point $(u,v)$ du plan.

**V.** 3 points.

Soit $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

1°. Déterminer et tracer dans le plan le domaine de définition de $f(x,y)$.
2°. Calculer grad $f$ et $\Delta f$