MATHEMATIQUES CR N°3 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2006/2007 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 6 points.

Déterminer les extrema des fonctions ci-dessous :

1°. $f(x,y) = xy$

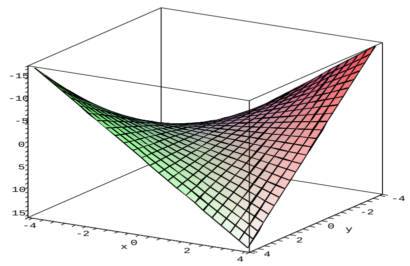
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$

Le seul point critique est donc $(0,0)$ $\boxed{\text{1 point}}$

En ce point, la matrice hessienne est :

$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont ± 1 $\boxed{\text{1 point}}$

Comme elles ne sont pas de même signe, le point $(0,0)$ est un point selle $\boxed{\text{1 point}}$



2°. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x$

De la même façon que ci-dessus

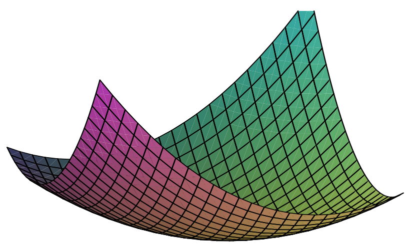
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y + 4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x$

La seconde équation s'annule ssi $x = y$ et la première devient alors $2x + 4$ qui s'annule en -2. Le seul point critique est donc $(-2,-2)$ $\boxed{\text{1 point}}$

En ce point, la matrice hessienne est :

$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont, après calcul du polynôme caractéristique, $3 \pm \sqrt{5}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Comme elles sont > 0, le point $(-2,-2)$ est un minimum strict $\boxed{\text{1 point}}$



II. 3 points.

Soit $f(x,y) = \arctan(\dfrac{y}{x^2})$

1°. Déterminer le domaine de définition de f et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2/\ \Delta$ où $\Delta : x = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{x^4+y^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. En déduire que $f(x,y)$ est solution de l'équation :

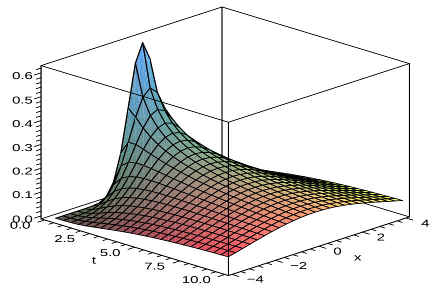
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

C'est évident et ça vaut quand même $\boxed{\text{1 point}}$

III. 3 points.

Soit $\phi(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$

1°. La fonction est définie si $t > 0$ $\boxed{\text{1 point}}$ (donc dans le demi-plan à droite de $(0,0)$). En bonus, voici sa surface représentative :



On constate qu'en dérivant, la fonction ϕ apparait naturellement (et il n'y a donc pas beaucoup de calculs à effectuer...). On a :

$\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \dfrac{x^2 - t}{2t^2}\phi(x,t) = \dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. En déduire que $\phi(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

On vient d'y répondre au dessus : il suffit de constater que les deux dérivées partielles coïncident (point donné, encore une fois) $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 5 points.

Soient $\mathcal{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ et $\mathcal{C} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ (1-u)v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1°. Tracer rapidement les ensembles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé du plan.

Comme l'indiquent les initiales, $\mathcal{T}$ est un triangle coincé entre les deux axes et la droite $x + y = 1$, tandis que $\mathcal{C}$ est le carré unité du plan $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer la matrice jacobienne $J_\phi(u,v)$ de ϕ ainsi que son déterminant.

On a $J_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-u \end{pmatrix}$ et $|J_\phi| = 1 - u$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Démontrer que $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{T}$

4°. En exprimant u et v en fonction de x et y, déduire l'expression de la réciproque $\psi(x, y)$ de la fonction ϕ.

5°. Calculer div ϕ et rot ϕ en un point (u, v) du plan.

V. 3 points.

Soit $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

1°. Déterminer et tracer dans le plan le domaine de définition de $f(x, y)$.
2°. Calculer grad f et Δf