MATHEMATIQUES CR N°3

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2007/2008 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 2 points.

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$

Déterminer le domaine de définition de $f(x,y)$ et ses dérivées partielles par rapport à x et y.

II. 4 points.

Soit $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$

1°. Déterminer les points critiques de $f(x,y)$.
2°. En déduire les maxima et les minima locaux de $f(x,y)$.

III. 5 points.

Considérons l'équation aux dérivées partielles $(\star)$ définie par

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\star)$$

Où f représente une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $g(r,\theta) = f(x,y)$

1°. Déterminer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.
2°. En déduire les solutions de l'équation $(\star)$.

IV. 8 points.

Calculer les intégrales ci-dessous :

1°. $\displaystyle\int\int_D \frac{x^2}{1+y^2}\, dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1\}$

2°. $\displaystyle\int\int_D xy\, dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x+y \le 1\}$

3°. $\displaystyle\int\int\int_D dxdydz$ avec $D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ z \ge 0\ ;\ x+y+z \le 1\}$

4°. $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x^2+y^2 \le 1\}$

V. 3 points.

Soit $I = \displaystyle\int\int_D \exp\left(\frac{y}{x+y}\right)\, dxdy$ avec $D = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1\ ;\ x+y \le 1\}$

Calculer I en effectuant le changement de variables $\begin{cases} u = x+y \\ v = \dfrac{y}{x+y} \end{cases}$