R&T 2nde année - **MATHEMATIQUES CR N°4**

2006/2007 - 24 Mars 2007 - Durée 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrice interdite.
On peut admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante.
Durant tout le devoir la fonction $H(t)$ représentera la fonction échelon de Heaviside : $H(t) = 1_{[0,+\infty[}(t)$

I. 3 points.

Tracer la courbe représentative des fonctions ci-dessous, puis à l'aide de la définition, calculer leur transformée de Laplace.

1°. $f(t) = H(t) - H(t-1)$ 2°. $g(t) = 1_{[0,1[}(t) - 1_{[1,2[}(t)$

II. 4 points.

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1°. $tH(t)$ 2°. $te^{-t}H(t)$ 3°. $t\sin(t)H(t)$ 4°. $te^{-t}\sin(t)H(t)$

III. 5 points.

Calculer les originaux des fonctions suivantes :

1°. $\dfrac{1}{(p+3)(p+1)}$ 2°. $\dfrac{3+p}{p(p+1)^2}$ 3°. $\dfrac{p}{p^2+p+1}$

IV. 4 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de Laplace :

1°. $\begin{cases} y'(t) - y(t) = e^{-t}H(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 2°. $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 3H(t) \\ y(0) = 0; y'(0) = 1 \end{cases}$

V. 5 points.

On considère un filtre d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$. On suppose que ce filtre est piloté par l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = x(t)$$

On suppose également que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont causales et que $y(0) = y'(0) = 0$.
Soient $X(p)$ et $Y(p)$ les transformées de Laplace respectives de $x(t)$ et $y(t)$.

1°. Exprimer $Y(p)$ en fonction de $X(p)$ et en déduire la fonction de transfert du filtre.

2°. Déterminer les originaux de $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$ et de $\dfrac{e^{-ap}}{p(p^2+1)}$ pour $a > 0$.

3°. En déduire la réponse $y(t)$ si $x(t) = 1_{[0,1[}(t) - 1_{[1,2[}(t)$ (on donnera l'expression de $y(t)$ sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $[0,1[$, $[1,2[$ et $[2,+\infty[$