GTR 1ère année FA - **MATHEMATIQUES CR N°1 - Corrigé**
2005/2006 - Mardi 27 Septembre 2005 - Durée 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrice interdite.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$ les équations trigonométriques suivantes :

1°. $\cos(x+\frac{\pi}{6})=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$

$\iff \begin{cases} x=\pi/2+2k\pi \\ x=\pi/18+2k\pi/3 \end{cases}$

Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont $\{\pi/2;\pi/18;13\pi/18;-11\pi/18\}$

2°. $\sin(2x)=\sin(3x-\frac{\pi}{2})$

$\iff \begin{cases} x=\pi/2+2k\pi \\ x=3\pi/10+2k\pi/5 \end{cases}$

Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont $\{\pi/2;3\pi/10;7\pi/10;-9\pi/10;-\pi/10;-\pi/2\}$

II. 2 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4\bar{z}-5=0$

En posant $z=a+ib$ et en injectant dans l'équation, on obtient le système : $\begin{cases} a^2-b^2-4a-5=0 \\ b(a+2)=0 \end{cases}$
de la seconde équation, on tire $b=0$ ou $a=-2$. Si $b=0$, la première équation est $a^2-4a-5=0$ qui a comme solutions -1 et 5. Si $a=-2$, l'équation devient $b^2=7$ d'où $b=\pm\sqrt{7}$. Ainsi, $\mathcal{S}=\{-1;5;-2+i\sqrt{7};-2-i\sqrt{7}\}$

III. 2 points.

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°. $(1+i)(2-3i)=2-3i+2i-3=5-i$

2°. $\dfrac{(1+2i)^2}{2-i}=-2+i$

IV. 4 points.
Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants :

1°. $-3+3i=3\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ (1 point).

2°. $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}}=\sqrt{2}e^{i2\pi/3}$ (1 point).

3°. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2005}=\left(\dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{2005}=e^{i\pi/2}=i$
(2 points).

V. 6 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1°. $z^2-(4-i)z+(3-i)=0$

$\Delta=3-4i$; une racine carrée de Δ est $\delta=2-i$ d'où les solutions dans $\mathbb{C}$: $\mathcal{S}=\{1;3-i\}$ (3 points).

2°. $z^2+(1-3i)z-2-2i=0$

$\Delta=2i=2e^{i\pi/2}$; on a alors $\delta=\sqrt{2}e^{i\pi/4}=1+i$ et les solutions sont $\mathcal{S}=\{-1+i;2i\}$

VI. 2 points.

Mettre sous forme algébrique $z=\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$

Le dénominateur est le conjugué du numérateur. Par ailleurs, $(1-i)^4=-4$ donc $(1-i)^5=-4+4i$. Ainsi, $z=(-5+4i)/(-3+4i)$ soit $z=(1-32i)/25$