MATHEMATIQUES CR N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 2007/2008 -

Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

Le dernier exercice est plus difficile ; il est conseillé de le traiter en dernier.

I. 4 points.

Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$

1°. $\cos(2x+\frac{\pi}{2}) = \sin x \iff \cos(2x+\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x+\pi/2 = \pi/2 - x + 2k\pi \\ 2x+\pi/2 = -\pi/2 + x + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi/3 \\ x = -\pi + 2k\pi \end{array} \right. \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont $\mathcal{S} = \{0;\pi;2\pi/3;-2\pi/3\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Il s'agit de faire apparaître des valeurs de sin et cos connues. On s'aperçoit qu'en $\times$ les deux membres par $\sqrt{3}/2$, cela se produit :

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{4})$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x+\pi/6 = \pi/4 + 2k\pi \\ x+\pi/6 = -\pi/4 + 2k\pi \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x+ = \pi/12 + 2k\pi \\ x = -5\pi/12 + 2k\pi \end{array} \right. \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont $\mathcal{S} = \{\pi/12;-5\pi/12\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 2 points.

Mettre sous forme algébrique :

1°. $3i(1+i)-(2+i)^2 = -6-i$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\frac{7+i}{3-i} - \frac{2}{1-i} = 2+i-1-i = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

III. 2 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1+i)^2 = \bar{z}^2-(1-i)^2$

Posons $z=a+ib$; on a $\bar{z} = a-ib$ et en remplaçant dans l'équation il vient :

$(a+ib)^2-2i = (a-ib)^2+2i$

$\iff 4iab = 4i \iff ab = 1 \iff b = 1/a$ $\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi, les solutions sont les complexes de la forme $a+i/a$ avec $a \neq 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 3 points.

Déterminer le module et l'argument des complexes suivants :

1°. $(\sqrt{3}+i)^4 = (2e^{i\pi/6})^4 = 16e^{2i\pi/3} = [16;\frac{2\pi}{3}]$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $(1-i)^2 = (\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^2 = -2i = [2;-\pi/2]$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $\frac{(\sqrt{3}+i)^4}{(1-i)^2} = \frac{[16;2\pi/3]}{[2;\ -\pi/2]} = [8;\frac{7\pi}{6}] = [8;-\frac{5\pi}{6}]$ $\boxed{\text{1 point}}$

V. 6 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1°. $z^2-(2+i)z+(3+i) = 0$

$\Delta = (2+i)^2-4(3+i) = -9 = (3i)^2$ $\boxed{\text{2 points}}$

On en déduit $\mathcal{S} = \{1+2i;1-i\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $iz^2-iz+(3-i) = 0$

$\Delta = -1-4i(3-i) = -5-12i$ $\boxed{\text{1 point}}$

On cherche l'une des racines carrées de Δ. Posons $\delta = \alpha+i\beta$. De $\delta^2 = \Delta$ on a :

$\alpha^2-\beta^2 = -5$, $\alpha\beta = -6$ et $\alpha^2+\beta^2 = 13$

Ainsi, $\alpha = \pm 2$ et $\beta = \pm 3$. Par ailleurs, α et β sont de signes contraires, donc : $\delta = 2-3i$ et $\delta' = -2+3i$ sont les deux racines carrées recherchées $\boxed{\text{1 point}}$

On en déduit les racines $(-b\pm\delta)/2a$:

$\mathcal{S} = \{2+i;-1-i\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

VI. 3 points.

Soit $\theta \in]-\pi,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $z = (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$

Déterminer le module et l'argument de z en fonction de n et θ.

L'idée est de mettre l'expression dans la parenthèse sous forme exponentielle. Il faut donc modifier l'expression pour obtenir quelque chose de la forme $\cos\bullet + i\sin\bullet$ et pour ce faire, il faut faire disparaitre le 1 : On doit utiliser les formules de duplication de cos et sin.

$z = (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n = (2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2})^n$

$= \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \times e^{in\theta/2}$ Comme $\theta \in]-\pi,\pi]$,

$\theta/2 \in]-\pi/2,\pi/2]$ et donc $\cos(\theta/2) > 0$. Par suite,

$|z| = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$ et $\arg z = \frac{n\theta}{2}$