MATHEMATIQUES CR N°1- Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 2008/2009

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5,5 points.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$ les équations trigonométriques suivantes :

1°. $\cos(3x)=\cos(x-\dfrac{\pi}{2})$

$\iff \begin{cases} 3x = x-\pi/2+2k\pi \\ 3x=-x+\pi/2+2k\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=-\pi/4+k\pi \\ x=\pi/8+k\pi/2 \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$ $\boxed{\text{1 point}}$

On en déduit alors

$\mathcal{S}_{]-\pi,\pi]}=\{-\pi/4;3\pi/4;\pi/8;5\pi/8;-7\pi/8;-3\pi/8\}$

$\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. $\sin x=\cos x \iff \sin x=\sin(\pi/2-x)$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

De la même façon que ci-dessus,

$\iff \begin{cases} x=\pi/2-x+2k\pi \\ x=\pi-\pi/2+2k\pi \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=\pi/4+k\pi \\ \pi/2=2k\pi \end{cases}$

La seconde équation est impossible et les solutions dans $\mathbb{R}$ sont donc de la forme $\pi/4+k\pi$ $\boxed{\text{1 point}}$

et les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont $\mathcal{S}=\{\pi/4,-3\pi/4\}$

$\boxed{\text{1.5 points}}$

II. 3 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2\bar{z}=0$

On pose $z=a+ib$ et en développant, il vient

$a^2+2iab-b^2+2a-2ib=0$.

En séparant partie réelle et imaginaire, on a :

$\begin{cases} a^2-b^2+2a=0 \\ 2ab-2b=0 \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

La seconde équation donne $b=0$ ou bien $a=1$.

Si $b=0$, en injectant dans la première équation on obtient $a=0$ ou $a=-2$ et si $a=1$, la première équation devient $b^2=3$, soit $b=\pm\sqrt{3}$. Finalement,

$\mathcal{S}=\{0;-2;1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$ $\boxed{\text{2 points}}$

III. 3,5 points.

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°. $(1-i)(1+3i)=4+2i$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $(1-3i)(5+2i)=11-13i$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\dfrac{(1+i)^2(1-i)^2}{1-2i}=\dfrac{4}{5}(1+2i)$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

IV. 5 points.

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants :

1°. $-2+2i=2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{-2+2i}\right)^4=\left(\dfrac{2e^{i\pi/6}}{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}\right)^4=\dfrac{1}{4}e^{-i\pi/3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $\left(\dfrac{2-2i}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}\right)^{12}=\left(\dfrac{2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2}e^{i\pi/6}}\right)^{12}$

$=\exp(-12i\times 5\pi/12)=-1$ $\boxed{\text{2 points}}$

VI. 3 points.

Exercice un peu plus dur à faire en dernier.

$-1+i-\sqrt{2}=\sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\,e^{3i\pi/8}\left(e^{3i\pi/8}-e^{-3i\pi/8}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)e^{3i\pi/8+i\pi/2}=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)e^{7i\pi/8}$

Puisque $\sin(3\pi/8)>0$, on en déduit que

$|z|=2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ et $\arg z=7\pi/8$