MATHEMATIQUES CR N°2

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 2007/2008 -
Durée : 1h15 -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points.

Soient $z = 4\sqrt{2}(1-i)$ et $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1°. Déterminer les racines cubiques de z sous forme exponentielle, puis exprimer l'une d'elles sous forme algébrique.

On voit facilement que $z = 8e^{-i\pi/4}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$
En appliquant la formule des racines nièmes, on trouve les trois racines cubiques u_0, u_1, u_2 :

$u_0 = 2e^{-i\pi/12}$, $u_1 = 2e^{i(-\pi/12+2\pi/3)} = 2e^{7i\pi/12}$ et
$u_2 = 2e^{i(-\pi/12-2\pi/3)} = 2e^{-3i\pi/4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

On constate que u_2 peut se mettre sous forme algébrique simplement :

$u_2 = 2\cos(3\pi/4) - 2i\sin(3\pi/4) = -\sqrt{2}(1+i)$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Calculer j^2 et j^3. Que représente j ?

$j = e^{2i\pi/3}$. Ainsi, $j^2 = \bar{j}$ et $j^3 = 1$. j est une des trois racines cubiques de l'unité ; les deux autres sont 1 et j.
$\boxed{\text{1 point}}$

3°. A l'aide de la question précédente, déterminer la forme algébrique des deux dernières racines cubiques de z.

On obtient les racines cubiques de z en multipliant l'une d'elles par les racines cubiques de l'unité. Ainsi,

$$u_2 = u_2 \times 1 = -\sqrt{2}(1+i)$$
$$u_0 = u_2 \times j = -\sqrt{2}(1+i)j = \frac{\sqrt{2}}{2}\left((1+\sqrt{3}) - i(\sqrt{3}-1)\right)$$
$$u_1 = u_2 \times j^2 = -\sqrt{2}(1+i)j^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left((1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}+1)\right)$$

$\boxed{\text{1.5 point}}$

II. 8 points.

Calculer, en justifiant, les limites suivantes :

1°. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20} = \lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}$
La limite en 5^- vaut donc $-\infty$ et la limite en 5^+ vaut $+\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(\bullet)}{(x-1)(\bullet\bullet)} = 0$ $\boxed{\text{1point}}$
On peut également appliquer la règle de l'Hospital.

3°. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

En appliquant la règle de l'Hospital.

4°. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1} = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

D'après le théorème des gendarmes. En effet,
$\displaystyle\left|\frac{x\sin x}{x^4+1}\right| \le \frac{|x|}{x^4+1}$ qui $\to 0$ si $x \to +\infty$

5°. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{5\cos(5x)}{\cos x} = 5$ $\boxed{\text{0.5 point}}$
D'après la règle de l'Hospital.

6°.
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}} = 0$$
$\boxed{\text{1 point}}$

7°. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1-1/x^2}} = -2$
$\boxed{\text{1 point}}$

8°. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1-x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right) = e^{-1}$

En effet, en appliquant la règle de l'Hospital
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{1-x} = -1$ $\boxed{\text{2 points}}$

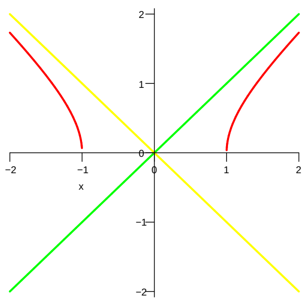
III. 7 points.

Déterminer le domaine de définition et les branches infinies des fonctions ci-dessous :

1°. $\sqrt{x^2-1}$

Appelons $f(x)$ cette fonction. $f(x)$ existe si $x^2-1 \ge 0$ ce qui est $\iff$ à $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ $\boxed{\text{1 point}}$
Comme $f(1) = f(-1) = 0$, il n'y aura pas d'asymptotes en ces points. Par ailleurs,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = 1.$$
Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x) = 0$ en $\times$ par l'expression conjuguée. Ainsi, $\Delta : y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$
La démonstration est la même en $-\infty$, à ceci près qu'un facteur -1 apparaît dans le calcul de $f(x)/x$ lorsqu'il faut “rentrer” le terme x sous la racine. La droite d'équation $\Delta' : y = -x$ est donc asymtptote en $-\infty$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

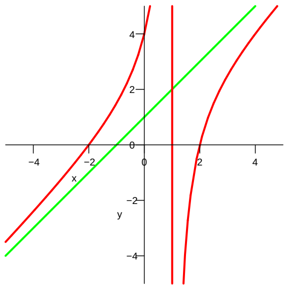


2°. $\dfrac{x^2-4}{x-1}$

Soit $f(x)$ cette fonction. Son domaine de définition est $\mathbb{R}$ privé de $\{1\}$.
$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{-3}{x-1} = +\infty$ et
$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{-3}{x-1} = -\infty$
Il existe donc une asymptote verticale à la courbe, d'équation $x = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1} = 1.$$

Enfin, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4-x^2-x}{x-1}=1$ de sorte que $\Delta : y=x+1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$



3°. $(x-1)e^{1/x}$

Le domaine de définition est clairement $\mathbb{R}^\star$.
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. (Oy) est donc asymptote verticale $\boxed{\text{1 point}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x=1$ et
$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x(e^{1/x}-1)-e^{1/x}\right)$
La première parenthèse tend vers 1 en appliquant la règle de l'Hospital et la seconde vers -1. Ainsi, $\Delta : y=x$ est asymptote en $\pm\infty$ $\boxed{\text{1.5 points}}$