MATHEMATIQUES CR N°3 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 2006/2007 -

Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points.

Soit $P(x) = x^6 - 3x^4 - x^3 - 3x - 2$

1°. Déterminer une racine simple du polynôme $A(x) = x^3 + 1$ et en déduire sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}$.

$A(-1) = 0$ donc $A(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$
La division euclidienne donne $A(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$ qui est la décomposition demandée puisque le second polynôme a un discriminant négatif. $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Démontrer que -1 est une racine double de $B(x) = x^3 - 3x - 2$. En déduire les autres racines.

$B(-1) = 0$, $B'(x) = 3x^2 - 3$ et $B'(-1) = 0$. Enfin, $B''(x) = 6x$ qui n'est pas nul en -1 ; ceci prouve que -1 est racine double de $B(x)$. Ce polynôme est donc divisible par $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et la division euclidienne donne $B(x) = (x+1)^2(x-2)$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. Démontrer que $P(x)$ est divisible par $A(x)$.

Là encore, une division euclidienne donne immédiatement $P(x) = A(x)B(x)$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles, dans $\mathbb{R}$, du polynôme $P(x)$.

Les racines (ou les zéros pour être bien rigoureux) de $P(x)$ sont celles de $A(x)$ ou de $B(x)$. Ainsi, $P(x) = (x+1)^3(x-2)(x^2 - x + 1)$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 9 points.

Décomposer en éléments simples :

1°. $\dfrac{2x}{x^2-4} = \dfrac{2x}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{\alpha}{x-2} + \dfrac{\beta}{x+2}$
$= \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$
en appliquant le théorème des résidus puisqu'il s'agit de deux pôles simples. $\boxed{\text{2 points}}$

2°. $\dfrac{x+2}{x(x+1)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1}$
de la même façon. $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $\dfrac{x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{(x-1)^2}$

En effet, 1 est un pôle double. Pour calculer α et β, on ne peut pas utiliser le théorème des résidus et il faut donc trouver deux astuces :
En $\times$ par x et en faisant tendre vers l'∞, on a $\alpha = 1$.
En $\times$ par $(x-1)^2$ et en posant $x = 1$, on a $\beta = -2$.

$F(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{(x-1)^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4°. $F(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 1}{x(x^2+1)}$

Le numérateur est de degré 4 et le dénominateur est de degré 3, il y a donc une partie entière. La division euclidienne montre alors que x est la partie entière. La fraction restante est alors décomposée (0 est un pôle simple) et l'on a :

$F(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1}$ $\boxed{\text{3 points}}$

III. 6 points.

Soit $A(x) = 4x^2 + 8x + 8$ et $B(x) = x + 2$

1°. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $A(x)$ par $B(x)$

On trouve $Q(x) = 4 + 2x + x^2$ et $R(x) = -x^3$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. Décomposer en éléments simples la fraction

$$F(x) = \frac{4x^2 + 8x + 8}{x^3(x+2)}$$

En utilisant la question précédente,

$$F(x) = \frac{1}{x^3}\left[(4 + 2x + x^2) - \frac{x^3}{x+2}\right] = \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

$\boxed{\text{2 points}}$

3°. En déduire la décomposition en éléments simples de

$$G(x) = \frac{4x^2 + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$$

Il suffit de constater que $G(x) = F(x-1)$ et l'on a immédiatement

$$G(x) = \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$\boxed{\text{2 points}}$