MATHEMATIQUES CR N°3 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 12/03/08 -

2007/2008 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 15 points.

1°. $\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = [\ln|x+1|]_0^1 = \ln 2$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\infty} = 1/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_1^{\infty} = \frac{\pi}{4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

5°. $\int_2^3 \frac{x}{1-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\right]_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$
$\boxed{\text{1.5 points}}$

6°. $\int_0^1 \arctan x \, dx = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$
$= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ $\boxed{\text{2 points}}$

7°. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) \, dx$
$= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$ $\boxed{\text{3 points}}$

8°. $\int_{\pi/3}^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x} = \int_{1/\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2 \, du}{u^2}$
$= \left[-\frac{1}{u}\right]_{1/\sqrt{3}}^{\infty} = \sqrt{3}$ $\boxed{\text{2.5 points}}$

9°. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 2\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$ $\boxed{\text{2 points}}$

II. 5 points.

On pose $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} \, dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} \, dx$

On pose également $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$

1°. Calculer $f'(x)$ et en déduire la valeur de I.

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi,

$I = [f(x)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$

$\boxed{\text{1 point}}$

2°. Démontrer que $K = 2I + J$ et que $K = \sqrt{3} - J$. En déduire J et K.

$2I + J = \int_0^1 \frac{2+x^2}{\sqrt{x^2+2}} \, dx = K$ $\boxed{\text{1 point}}$

$J = \int_0^1 \frac{x^2+2-2}{\sqrt{x^2+2}} \, dx = K + \sqrt{3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

On en déduit alors que $J = \sqrt{3}/2 - I$ et $\sqrt{3}/2 + I$
$\boxed{\text{1 point}}$