MATHEMATIQUES CR N°4 - CORRIGE - 1ère année par apprentissage

R&T Saint-Malo - 17 janvier 2007 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

1°. En effectuant une division euclidienne, on a $f(x) = x+1-\dfrac{3}{x-1}$

Ainsi, $\Delta : y = x+3$ est asymptote oblique à la courbe en $\pm\infty$ et $\mathcal{D} : x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

Δ est au dessus de la courbe en $+\infty$ (et en dessous en $-\infty$) car $x > 1 \Rightarrow -\dfrac{3}{x-1} < 0$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{1\}$ de façon évidente. $\boxed{\text{1 point}}$

$f'(x) = \dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

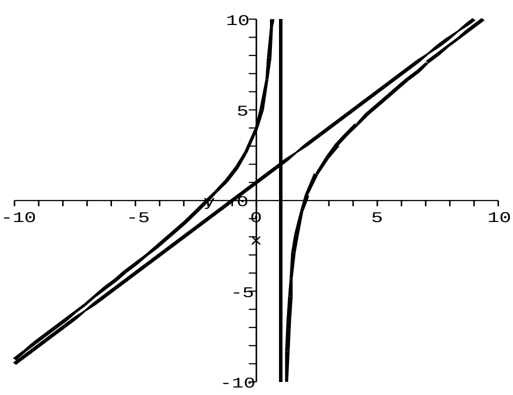
Le dénominateur est un carré donc > 0 et le numérateur est un polynôme du second degré dont le discriminant est < 0 de sorte que ce polynôme est toujours positif (du signe du coef de x^2). Ainsi, f est croissante. $\boxed{\text{1 point}}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f''(x) = -\dfrac{6}{(x-1)^3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

qui est du signe contraire de $x-1$; $f(x)$ est convexe si $x < 1$ et concave si $x > 1$. Il n'y a pas de point d'inflexion. $\boxed{\text{1 point}}$

Voici enfin la courbe $\boxed{\text{1 point}}$:



II. 12 points.

$f(x) = (x+2)e^{1/x}$

De façon également évidente $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}/\{0\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f'(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2}e^{1/x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$f'(x)$ est du signe de x^2-x-2 dont les racines sont -1 et 2. Ainsi, $f(x)$ est croissante sur $]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$ et décroissante sur $[-1,0[\cup]0,2]$. $\boxed{\text{1 point}}$

Les limites en $\pm\infty$ ne sont pas indéterminées et l'on a facilement : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Par ailleurs, en 0^-, $1/x$ tend vers $-\infty$ donc $\exp(1/x)$ tend vers 0, ainsi $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$,
tandis qu'en 0^+, $1/x$ tend vers $+\infty$ donc $\exp(1/x)$ tend vers ∞ plus vite que $x+2$, ainsi : $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

$\boxed{\text{2 points}}$

$f''(x) = \dfrac{5x+2}{x^2}e^{1/x}$ après simplifications $\boxed{\text{1.5 points}}$

et cette expression est du signe de $5x+2$. Ainsi, si $x > -2/5$ $f(x)$ est convexe, si $x < -2/5$ $f(x)$ est concave et le point d'abscisse $-2/5$ est un point d'inflexion de la courbe. $\boxed{\text{2 points}}$

- Branches infinies :

La limite infinie de $f(x)$ en 0 prouve l'existence d'une asymptote verticale à la courbe ; son équation est $x = 0$. Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty}(1+2/x)e^{1/x} = 1$ et

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x(e^{1/x}-1)+2e^{1/x}\right]$

La première expression tend vers 1 d'après la règle de l'Hospital (ou bien en reconnaissant la limite usuelle $(e^u-1)/u$) et la seconde expression $2e^{1/x}$ tend clairement vers 2. Ainsi, $\Delta : y = x+3$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$. La démo est aussi valables en $-\infty$. $\boxed{\text{2 points}}$

Voici la courbe : $\boxed{\text{1.5 points}}$