MATHEMATIQUES CR N°4

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 16/05/08 - 2007/2008 - Durée : 1h15 -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 9 points.

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

1°. $y' = -y$ 2°. $y' + x^2 y = 0$ 3°. $y' - y\cos x = 0$ 4°. $xy' - y = 0$ 5°. $(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}$

II. 8 points.

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

1°. $y'' + 3y' + 2y = e^x$ 2°. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ 3°. $y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$

III. 4 points.

Un parachutiste de masse m tombe verticalement. Il est soumis à son poids mg dirigé vers le bas et à une force de frottement λv dûe à son parachute et dirigée vers le haut. On suppose que cette force est proportionnelle à la vitesse de chute v ainsi qu'à un coefficient λ dépendant de la surface du parachute.

Soit $y(t)$ la position au temps t du parachutiste. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on montre que l'équation différentielle vérifiée par $y(t)$ est

$$mg - \lambda y'(t) = my''(t)$$

On supposera que $y(0) = y'(0) = 0$

1°. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $y(t)$ en fonction de m, λ, g et t.
2°. Calculer la vitesse de chute à l'instant t.
3°. Démontrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite lorsque t tend vers l'infini. Sachant que $m = 100$ kg et $g = 10$ ms^{-2}, déterminer le coefficient λ pour que le parachutiste touche le sol à la vitesse de 5 ms^{-1}.