MATHEMATIQUES CR N°4 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 16/05/08 - 2007/2008 - Durée : 1h15 -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 9 points.

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

Les quatre premières équations sont à variables séparables.

1°. $y' = -y \iff y'/y = -1 \iff \ln y = -x + K$ $K \in \mathbb{R}$ $\iff y = ke^{-x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°.
$y' + x^2y = 0 \iff y'/y = -x^2 \iff \ln y = -x^3/3 + K$ $K \in \mathbb{R}$
$\iff y = ke^{-x^3/3}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°.
$y' - y\cos x = 0 \iff y'/y = \cos x \iff \ln y = \sin x + K$
$y = ke^{\sin x}$ $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4°. $xy' - y = 0 \iff y'/y = 1/x \iff y = kx$ $k \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{1 point}}$

La dernière équation est une équation linéaire d'ordre 1.

5°. $(1 + x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$

L'équation peut s'écrire sous la forme
$y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}y = \dfrac{1}{x(1 + x^2)}$

L'équation homogène associée est $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}y = 0$

$\iff \ln y = -\ln(1 + x^2) + K \iff y = \dfrac{k}{1 + x^2}$ $k \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{1 point}}$

Comme il n'est pas évident de trouver une solution particulière directement, appliquons la méthode de la variation de la constante et cherchons une solution sous la forme $y_0(x) = \dfrac{k(x)}{1 + x^2}$

En dérivant et en injectant dans l'équation initiale, il vient $k'(x) = 1/x$ et donc $k(x) = \ln x$.

La solution particulère cherchée est $y_0(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$

$\boxed{\text{1 point}}$

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme des deux fonctions précédentes :
$y(x) = \dfrac{\ln x + k}{1 + x^2}$ avec $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 8 points.

Résoudre les équations différentielles ci-dessous :

Il s'agit d'équations linéaires d'ordre deux à coefficients constants. Dans les trois cas, on va résoudre l'équation homogène associée, déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre puis additionner les deux.

1°. $y'' + 3y' + 2y = e^x$

L'équation homogène associée est $y'' + 3y' + 2y = 0$ dont l'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$. Cette équation a deux racines simples : -1 et -2 et d'après le cours, l'équation homogène a donc pour solution
$z(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Le second membre est de la forme $P_n(x)e^{kx}$ avec $k = 1$ qui n'est pas racine de l'équation caractéristique et $n = 0$ (en fait $P_n(x) = 1$). Nous chercherons donc une solution particulière sous la forme ae^x. Après calculs, on trouve $a = 1/6$ et la solution particulière est $y_0(x) = e^x/6$
$\boxed{\text{1 point}}$

La solution à l'équation initiale est, finalement,
$\boxed{y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + e^x/6}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

L'équation homogène est la même et il suffit donc de trouver une solution particulière. Cette fois-ci, la valeur $k = -1$ de l'exponentielle est racine simple de l'équation caractéristique. On cherchera donc $y_0(x)$ sous la forme $y_0(x) = axe^{-x}$. Après calculs, on trouve $y_0(x) = xe^{-x}$ et la solution générale est donc
$\boxed{y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-2x} + xe^{-x}}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$

L'équation homogène est $y'' - 4y' + 4y = 0$ et son équation caractéristique est $(r - 2)^2 = 0$ dont la solution double est 2. Par conséquent, d'après le cours, la solution de l'équation homogène est de la forme
$z(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Comme le second membre est de la forme $P_n(x)e^{kx}$ avec $k = 2$ qui est racine double de l'équation caractéristique, on cherchera $y_0(x) = x^2(ax + b)e^{2x}$. Après calculs, on trouve $y_0(x) = (x^3)e^{2x}$ $\boxed{\text{2 points}}$

La solution générale est finalement
$\boxed{y(x) = (x^3 + \alpha x + \beta)e^{2x}}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

III. 4 points.

Un parachutiste de masse m saute d'un avion et tombe verticalement. Il est soumis à son poids mg dirigé vers le bas et à une force de frottement λv dûe à son parachute et dirigée vers le haut. On suppose que cette force est proportionnelle à la vitesse de chute v ainsi qu'à un coefficient λ dépendant de la surface du parachute.

Soit $y(t)$ la position au temps t du parachutiste. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, on montre que l'équation différentielle vérifiée par $y(t)$ est

$$mg - \lambda y'(t) = my''(t)$$

On supposera que $y(0) = y'(0) = 0$

1°. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer $y(t)$ en fonction de m, λ, g et t.

l'équation peut se mettre sous la forme $y'' + \dfrac{\lambda}{m}y' = g$.

Son équation homogène associée est $y'' + \dfrac{\lambda}{m}y' = 0$ et l'équation caractéristique est $r(r + \lambda/m) = 0$ dont les deux solutions simples sont 0 et λ/m. On en déduit que la solution de l'équation homogène est
$y(t) = (\alpha + \beta e^{-\lambda t/m})$

La fonction mgt/λ est solution particulière et la solution générale est donc de la forme
$y(t) = (\alpha + \beta e^{-\lambda t/m}) + mg/\lambda$

$y'(t) = -\beta \frac{\lambda}{m} e^{-\lambda t/m} + \frac{mg}{\lambda}$

$y'(0) = 0 \Rightarrow \beta = m^2 g/\lambda^2$ et $y(0) = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$. Ainsi

$$y(t) = \frac{m^2 g}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda t/m}) + \frac{mg}{\lambda} t$$

$\boxed{\text{2 points}}$

2°. Calculer la vitesse de chute à l'instant t.

Il suffit de dériver $y(t)$: $y'(t) = \frac{mg}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t/m}) + \frac{mg}{\lambda}$

$\boxed{\text{1 point}}$

3°. Démontrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite lorsque t tend vers l'infini. Sachant que $m = 100$ kg et $g = 10$ ms^{-2}, déterminer le coefficient λ pour que le parachutiste touche le sol à la vitesse de 5 ms^{-1}.

On voit clairement que $\lim_{t \to +\infty} y'(t) = \frac{mg}{\lambda}$ qui représente la vitesse limite $\boxed{\text{1 point}}$

A.N. $\lambda = mg/5 = 200$