R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 2008/2009 -

Durée : 1h - 12/06/2009

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 11 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1°. $y' + 3x^2 y = 0$
$y(x) = ke^{-x^3}$, $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $y' + y = x$
C'est une équation linéaire d'ordre 1. On trouve facilement les solutions de l'équation homogène et l'on constate que $x - 1$ est solution particulière évidente. Donc :
$y(x) = ke^{-x} + x - 1$, $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $y' + y = e^x$ C'est une équation linéaire d'ordre 1. L'équation homogène est la même que dans la question précédente et l'on constate que $e^x/2$ est solution particulière évidente. Donc :
$y(x) = ke^{-x} + \frac{1}{2}e^x$, $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{2 points}}$

4°. $y' - 3x^2 y = e^{x^3}$
La solution de l'équation homogène est ke^{x^3} et par la méthode de la variation de la constante, on trouve comme solution particulière xe^{x^3}. Ainsi,
$y(x) = (k + x)e^{x^3}$, $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{3 points}}$

5°. $y' - 3y = 2\sin x$
La solution de l'équation homogène est ke^{3x} et l'on cherche une solution particulière sous la forme $\alpha \cos x + \beta \sin x$. En dérivant et en injectant dans l'équation, il vient :
$y(x) = ke^{3x} - \frac{1}{5}(\cos x + 3\sin x)$, $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{3 points}}$

II. 6 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes.

Il s'agit d'équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation homogène est la même pour les trois équations.

1°. $y'' - 2y' + y = 0$
L'équation caractéristique est $(r-1)^2 = 0$ dont la solution double est 1. Les solutions sont donc, d'après le cours, de la forme $(\alpha x + \beta)e^x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $y'' - 2y' + y = x^2$
Il suffit de trouver une solution particulère de cette équation. Le second membre est de la forme $P(x)e^{kx}$ avec $k = 0$ et $P(x) = x^2$. Comme 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche la solution particulière $y_0(x)$ sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c$. Après calculs, il vient : $y(x) = (\alpha x + \beta)e^x + x^2 + 4x + 6$
$\boxed{\text{2 points}}$

3°. $y'' - 2y' + y = e^x$

forme $y_0(x) = ax^2 e^x$. Après calculs, il vient
$y(x) = (\alpha x + \beta)e^x + x^2 e^x/2$ $\boxed{\text{3 points}}$

III. 4 points.

On considère une bouée de forme cylindrique, de rayon r et de hauteur H. Cette bouée est verticale et partiellement immergée dans l'eau. On gradue l'axe des abscisses vericalement, vers le haut, avec une origine à la surface de l'eau. On note h la hauteur immergée de la bouée et $x(t)$ l'abscisse, sur la bouée, de la position d'équilibre. La bouée est soumise à son poids m et à la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F}$, qui est dirigée verticalement, du bas vers le haut et dont l'intensité est égale au poids du volume d'eau déplacé par la partie immergée de la bouée.

On écarte la bouée de sa position d'équilibre en la soulevant de 1 mètre, puis on la lâche. On souhaite étudier en fonction du temps l'écart $x(t)$ entre la position d'équilibre de la bouée et la surface de l'eau.

1°. Faire un dessin.
2°. On admet que $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$x''(t) + \frac{\pi r^2}{m} x(t) = 0$$

Résoudre cette équation. Quel est le mouvement de la bouée ?
3°. En effectuant le bilan des forces, établir l'équation différentielle précédente (question bonus).

1°. Dessin sur $\boxed{\text{1 point}}$.
2°. Il s'agit d'une équation linéaire homogène d'ordre 2. L'équation caractéristique est $y^2 + \pi r^2/m = 0$ dont les solutions complexes sont $\pm ir\sqrt{\pi/m}$. D'après le cours, les solutions sont donc de la forme

$$x(t) = \alpha \cos\left(r\sqrt{\pi/m}\; t\right) + \beta \sin\left(r\sqrt{\pi/m}\; t\right)$$

Au temps $t = 0$, on a $x(0) = 1$ ce qui montre que $\alpha = 1$ et $x'(0) = 0$ ce qui montre que $\beta = 0$. La solution unique au problème est donc

$$x(t) = \cos\left(r\sqrt{\pi/m}\; t\right)$$

Il s'agit d'un mouvement sinusoïdale : la bouée oscille autour de la surface de l'eau. $\boxed{\text{2 points}}$

3°. La relation fondamentale de la dynamique appliquée ici est $mx''(t) = \pi r^2(h - x(t)) - mg$. Par ailleurs, $mg = \pi r^2 h$ à l'équilibre. On en déduit la relation.
$\boxed{\text{1 point}}$