

MATHEMATIQUES DS N°6 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année par apprentissage - 25 juin

2009 - Année Scolaire 2008/2009 - Durée : 2h -



Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.

Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le

barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Calculer les déterminants suivants :

$$1^\circ. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

On le voit en utilisant la règle de Sarrus (horrible) ou bien remplaçant L_3 par $L_3 - L_1 - L_2$ (ce qui fait apparaître un zéro), puis en développant par rapport à la dernière ligne. 2 points

$$2^\circ. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times 2 = 0$$

Car c'est un déterminant triangulaire 1 point

$$3^\circ. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

En permutant les colonnes 1 et 3, on se ramène à un déterminant triangulaire. 1 point

$$4^\circ. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe alors par rapport à la première ligne :

$$= -6 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -30 \quad \text{2 points}$$

$$5^\circ. = 4 \times 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12 \times 60 = 720$$

On factorise la première colonne par 4, la dernière par 3, on développe par rapport à la première colonne qui contient deux zéros, puis les deux déterminants 3×3 obtenus se développent également chacun. On peut aussi factoriser le déterminant par 2, 5 et 2 pour faciliter les calculs. 2 points

II. 6 points.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

1°. Pour quelles valeurs de α , la matrice A est-elle inversible ?

$\det(A) = 1 - \alpha^2$ qui est nul ssi $\alpha = \pm 1$. Donc si α est différent de ces deux valeurs, la matrice est inversible.

1 point

2°. Calculer alors l'inverse de A en fonction de α

$$\text{La matrice des cofacteurs est } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha^2 \\ \alpha & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et par suite, } A^{-1} = \frac{1}{1 - \alpha^2} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & 1 \\ -\alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$$

2 points

$$3^\circ. \text{ Résoudre le système linéaire } \begin{cases} x + \alpha y = -3 \\ y - z = 4 \\ \alpha x + z = 7 \end{cases} \text{ et}$$

discuter du nombre de solutions selon la valeur de α .

On voit que résoudre ce système revient à déterminer $X = {}^t(x, y, z)$ tel que $AX = B$ avec $B = {}^t(-3, 4, 7)$. La solution du système est donc $X = A^{-1}B$ lorsque A est inversible.

En ce cas, on a

$$x = \frac{-3 - 11\alpha}{1 - \alpha^2}, y = \frac{3\alpha - 11}{1 - \alpha^2}, z = \frac{4\alpha^2 + 3\alpha + 7}{1 - \alpha^2}$$

2 points

Lorsque α vaut 1 le système n'a pas de solution et lorsque α vaut -1 il en a une infinité. 1 point

III. 6 points.

1° On a $\det P = 1$ et P est donc inversible. Après calcul,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{1.5 points}$$

$$2^\circ. \text{ Après calcul, } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{1 point}$$

$$3^\circ. D = P^{-1}AP \iff A = PDP^{-1} \text{ et donc } A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} \quad \text{1 point}$$

$$4^\circ. \text{ On a facilement } D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{0.5 point et}$$

la question précédente montre que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3(2^n - 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{2 points}$$

On peut remarquer que cette matrice est nécessairement triangulaire afin de diminuer le nombre de calculs à faire.