MATHEMATIQUES CR N°7 - CORRIGE
R&T Saint-Malo - apprentissage 1ère année
- 2006/2007 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.
Orthographe et clarté de la présentation : $\boxed{\text{1 point}}$

I. 4 points.

L'équation homogène associée est $y'' + y' - 2y = 0$.
On en déduit alors l'équation caractéristique qui est $r^2 + r - 2 = 0$ et dont les deux solutions réelles sont -2 et 1 $\boxed{\text{1 point}}$

D'après le cours, les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $z(t) = \alpha e^{-2t} + \beta e^t$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{1 point}}$

Déterminons maintenant une solution particulière de l'équation. Le second membre étant un polynôme de degré deux, nous chercherons cette solution particulière sous la forme $y_0(t) = at^2 + bt + c$.
On a alors $y_0'(t) = 2at + b$ et $y_0''(t) = 2a$
En injectant dans l'équation initiale, il vient immédiatement $a = b = 4$ et $c = 6$ $\boxed{\text{1 point}}$

La solution générale de l'équation initiale est donc
$y(t) = z(t) + y_0(t) = \alpha e^{-2t} + \beta e^t + 4t^2 + 4t + 6$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 5 points = $\boxed{\text{1,5+1,5+2 points}}$

1°. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ -4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 18$

2°. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$

3°. 1°. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}$

II. 10 points.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 16$

1°. $\det P = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. Calculer $D = P^{-1}AP$.

Le calcul donne $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$

3°. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n.

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire A^n.

$A^n = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times ... \times PDP^{-1} = PD^nP^{-1} = PD^nP^{-1}$
$\boxed{\text{1 point}}$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 4(2^n - 1) & 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

5°. Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x + z = -11 \\ x + 2y - 2z = 50 \end{cases}$$

Le système s'exprime sous la forme $PX = B$ et sa solution (unique) est $X = P^{-1}B$.
Ainsi, $\mathcal{S} = \{(2, 11, -13)\}$ $\boxed{\text{2 points}}$