MATHEMATIQUES CR N°1

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2006/2007 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points.

Calculer les déterminants suivants :

1°. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 2°. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 3°. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \end{vmatrix}$

II. 15 points.

Considérons l'application linéaire u dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1°. Calculer $u(\vec{i})$, $u(\vec{j})$, $u(\vec{k})$. Déterminer $\ker A$ et $Im\ A$.

2°. Diagonaliser A en précisant la forme diagonale D et une matrice de passage P vers une base de vecteurs propres.

3°. On donne $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

4°. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = 2y \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

où $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.