MATHEMATIQUES CR N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2006/2007

I. 5 points.

Calculer les déterminants suivants :

1°. Sur 1,5 points.
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$
$2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1-4) = -10$

2°. Sur 1,5 points (c'est donné).
La matrice est triangulaire sup. On a immédiatement
$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times 5 = 40$

3°. Sur 2 points. Commençons par remarquer que l'on peut factoriser le ligne 4 par 7, la ligne 1 par 3 et la colonne 1 par 4. On fait ensuite apparaitre trois zéros sur la première colonne en soustrayant la ligne 1 à toutes les autres et l'on obtient :

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \end{vmatrix} = 7 \times 4 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 84 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 84 \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -84 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 756$$

II. 15 points.

Considérons l'application linéaire u dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1°. Sur 1 point ; $u(\vec{i}) = (2, 0, 0)$, $u(\vec{j}) = (-1, 2, -1)$, $u(\vec{k}) = (1, 0, 3)$. Il s'agit tout simplement des 3 colonnes de A.

1 point pour chaque sous-espace (avec base et dimension) : Déterminer $\ker A$ et $Im\ A$ en précisant une base et la dimension.

$\vec{X}(x, y, z) \in \ker A \iff x = y = z = 0$
$\ker A$ est le sous espace nul (de dim 0). Ainsi, $Im\ A$ est l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

2°. $P(X) = (2 - X)^2(3 - X)$; les valeurs propres de A sont donc 2 et 3 (1 point).
A est diagonalisable ssi $\dim E_2 = 2$.
$\vec{X}(x, y, z) \in E_2 \iff y = z$ et
$\vec{X}(x, y, z) \in E_3 \iff x = z$ et $y = 0$. Ainsi,
$E_2 = vect\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
(1,5 point par sous espace si base et dim)

On peut alors choisir pour matrice P la matrice donnée dans l'énoncé (ses colonnes sont des vecteurs propres de A et dans cette base la matrice de l'application linéaire associée à A devient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (2 points).

3°. On donne $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

P est-elle inversible ? Si oui, calculer P^{-1} (2 points).

$\det P = -1 \neq 0$ donc P est inversible et
$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4°. On pose $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors $X' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et le système devient $X' = AX$. Dans la base de vecteurs propres, cette équation devient $Y' = DY$ avec
$Y \begin{pmatrix} u \\ u \\ w \end{pmatrix} = P^{-1}X$. Le système diagonal revient à résoudre les 3 équations différentielles $u' = 2u$, $v' = 2v$ et $w' = 3w$. On a alors $Y = \begin{pmatrix} k_1e^{2t} \\ k_2e^{2t} \\ k_3e^{3t} \end{pmatrix}$ avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.
Dans la base canonique, on a donc
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = PY = \begin{pmatrix} k_2e^{2t} + k_3e^{3t} \\ k_1e^{2t} + k_3e^{3t} \\ (k_1 + k_2)e^{2t} + k_3e^{3t} \end{pmatrix}$ (3 points).

5°. $A^n = PD^nP^{-1}$. De $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, il vient
$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 3^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - 3^n & 3^n \end{pmatrix}$ (2 points).