MATHEMATIQUES CR N°1

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2007/2008 - Durée : 1h15 -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 18 points.

Soient u et v deux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.
2°. A est-elle diagonalisable ?
3°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.
4°. B est-elle diagonalisable ?
5°. On considère maintenant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

6°. On note $\vec{\alpha}, \vec{j}, \vec{\beta}$ les vecteurs colonnes de P. Déterminer les matrices D et T de u et v dans cette base. Exprimer $v(\vec{j})$ en fonction de $\vec{\alpha}$ et $\vec{j}$; en déduire la forme de T.

7°. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 5z(t) \\ y'(t) = -2y(t) + 5z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases}$

avec $x(t), y(t), z(t)$ fonctions de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}$

Parmi les solutions, déterminer celle qui vérifie $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

II. 2 points.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = 0$. Nous noterons :
$\mathcal{E} = \{y(t)/\ y''(t) + y(t) = 0\}$

1°. Démontrer rapidement qu'il s'agit d'un espace vectoriel.
2°. Démontrer que $\sin x$ et $\cos x$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
3°. Démontrer que toute solution de $\mathcal{E}$ est de la forme $\alpha \sin x + \beta \cos x$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
En déduire, en justifiant, la dimension et une base de $\mathcal{E}$.