MATHEMATIQUES CR N°1 - Formation par apprentissage

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2008/2009 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 11 points.

On considère une application linéaire u dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer $u(\vec{i})$, $u(\vec{j})$ et $u(\vec{k})$. Pour un vecteur $\vec{X}$ de coordonnées (x, y, z) déterminer son image $u(\vec{X})$.

2°. Déterminer $\ker u$ et Im u en précisant une base et la dimension.

3°. Calculer A^2, puis déterminer $\ker(uou)$ et Im (uou) en précisant une base et la dimension.

4°. A est-elle inversible ?

II. 9 points.

Notons $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On travaillera dans la base $\{x^2, x, 1\}$ de cet espace.

On considère une application $u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme $P = ax^2 + bx + c$ associe le polynôme $u(P) = bx^2 + cx + a$.

1°. Démontrer que u est linéaire et déterminer sa matrice M dans la base $\{x^2, x, 1\}$.

2°. Calculer M^2 et M^3. Expliquer la forme de M^3.

3°. Déterminer $\ker u$ et Im u en présisant une base et la dimension.

4°. Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1}.