MATHEMATIQUES CR N°1 CORRIGE - Formation par apprentissage

R&T Saint-Malo - 2nde année - 2008/2009 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 11 points.

On considère une application linéaire u dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer $u(\vec{i})$, $u(\vec{j})$ et $u(\vec{k})$. Pour un vecteur $\vec{X}$ de coordonnées (x, y, z) déterminer son image $u(\vec{X})$.

$u(\vec{i})$ est la première colonne de A par contruction de la matrice d'une application linéaire. $u(\vec{j})$ est la seconde colonne et $u(\vec{k})$ la troisième. Enfin,
$u(\vec{X}) = A \times \vec{X} = (x - z, 2y, x - z)$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer $\ker u$ et Im u en précisant une base et la dimension.

$\vec{X} \in \ker u \iff A\vec{X} = \vec{0} \iff y = 0$ et $x = z$. Ainsi,
$\ker u = \{(x, 0, x); x \in \mathbb{R}\}$ $\boxed{\text{1 point}}$
Il s'agit donc d'un espace de dimension 1 et de base $\{(1, 0, 1)\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

De même, $\text{Im}(A) = \{(x, y, x); y, x \in \mathbb{R}\}$ $\boxed{\text{1 point}}$
qui est un espace de dimension 2 et de base $\{(1, 0, 1); (0, 1, 0)\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Calculer A^2, puis déterminer $\ker(uou)$ et Im (uou) en précisant une base et la dimension.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\text{1 point}}$$

$\vec{X} \in \ker u^2 \iff A^2\vec{X} = \vec{0} \iff y = 0$ $\boxed{\text{1 point}}$
Il s'agit donc d'un espace de dimension 2 et de base $\{(1, 0, 0); (0, 0, 1)\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

De même, $\text{Im}(A^2) = \{(0, y, 0); y, z \in \mathbb{R}\}$ $\boxed{\text{1 point}}$
qui est un espace de dimension 1 et de base $(0, 1, 0)$
$\boxed{\text{1 point}}$

4°. A est-elle inversible ?

$\det A = 0$ et par conséquent A n'est pas inversible
$\boxed{\text{1 point}}$

II. 9 points.

Notons $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On travaillera dans la base $\{x^2, x, 1\}$ de cet espace.

On considère une application $u : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme $P = ax^2 + bx + c$ associe le polynôme $u(P) = bx^2 + cx + a$.

1°. Démontrer que u est linéaire et déterminer sa matrice M dans la base $\{x^2, x, 1\}$.

le polynôme image $u(P)$ a des coordonnées qui sont combinaisons linéaires des coefficients du polynôme P et par conséquent u est linéaire $\boxed{\text{1 point}}$

Pour déterminer la matrice, il suffit de calculer les coordonnées des vecteurs $u(x^2) = 1$, $u(x) = x^2$ et $u(1) = x$ et de les exprimer dans la base $(x^2, x, 1)$. Il vient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\text{1 point}}$$

2°. Calculer M^2 et M^3. Expliquer la forme de M^3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\text{1 point}}$$
$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \boxed{\text{1 point}}$$

M^3 est égale à la matrice identité car l'application effectue une permutation circulaire des coefficients. Après deux permutations, on retrouve le polynôme initial.
$\boxed{\text{1 point}}$

3°. Déterminer $\ker u$ et Im u en présisant une base et la dimension.

$\vec{X} \in \ker u \iff A\vec{X} = \vec{0} \iff a = b = c = 0$
Il s'agit donc d'un espace de dimension 0 $\boxed{\text{1 point}}$

De même, $\text{Im}(A) = \{(b, c, a); a, b, c \in \mathbb{R}\}$
qui est un espace de dimension 3 et de base $\{x^2, x, 1\}$
On trouve immédiatement le résultat en appliquant le théorème du noyau-image. $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $\det M = 1$ et $M^{-1} = M^2$ puisque $M^3 = M \times M^2 = I$
$\boxed{\text{2 points}}$