MATHEMATIQUES CR N°1

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 17/09/2009 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 12 points.

Considérons l'application linéaire u dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1°. Calculer $u(\vec{i})$, $u(\vec{j})$, $u(\vec{k})$. Déterminer $\ker A$ et $Im\ A$.

2°. Diagonaliser A en précisant la forme diagonale D et une matrice de passage P vers une base de vecteurs propres.

3°. On donne $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

4°. Calculer $P^{-1}AP$ et retrouver le résultat précédent.

II. 8 points.

Soit v une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.
2°. B est-elle diagonalisable ?

3°. On considère maintenant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

4°. On note $\vec{\alpha},\vec{j},\vec{\beta}$ les vecteurs colonnes de P. Déterminer la matrice T de v dans cette base. Exprimer $v(\vec{j})$ en fonction de $\vec{\alpha}$ et $\vec{j}$; en déduire la forme de T.