MATHEMATIQUES CR N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2009/2010

I. 12 points.

Considérons l'application linéaire u dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1°. Sur $\boxed{\text{1 point}}$; $u(\vec{i}) = (2,0,0)$, $u(\vec{j}) = (-1,2,-1)$, $u(\vec{k}) = (1,0,3)$. Il s'agit tout simplement des 3 colonnes de A.

Déterminer $\ker A$ et $Im\ A$ en précisant une base et la dimension $\boxed{\text{1.5 points}}$.

$\vec{X}(x,y,z) \in \ker A \iff x = y = z = 0$
$\ker A$ est le sous espace nul (de dim 0). Ainsi, $Im\ A$ est l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

2°. $P(X) = (2-X)^2(3-X)$; les valeurs propres de A sont donc 2 et 3 $\boxed{\text{1.5 points}}$
A est diagonalisable ssi $\dim E_2 = 2$.
$\vec{X}(x,y,z) \in E_2 \iff y = z$ et
$\vec{X}(x,y,z) \in E_3 \iff x = z$ et $y = 0$. Ainsi,

$E_2 = vect\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1,5 point par sous espace si base et dim) $\boxed{\text{3 points}}$

On peut alors choisir pour matrice P la matrice donnée dans l'énoncé (ses colonnes sont des vecteurs propres de A et dans cette base la matrice de l'application linéaire associée à A devient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On donne $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

P est-elle inversible ? Si oui, calculer P^{-1} $\boxed{\text{2 points}}$

$\det P = -1 \neq 0$ donc P est inversible et
$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4°. On retrouve D ! ! $\boxed{\text{2 points}}$

II. 8 points.

1°. $P_B(X) = (2+X)^2(3-X)$ et les valeurs propres sont -2 et 3 $\boxed{\text{1 point}}$

2°. B est-elle diagonalisable ?
Sous espace propre associé à 3 :
$\vec{X}(x,y,z) \in E_3 \iff \begin{cases} -3x + y - 4z = 0 \\ -4x - 7y + 3z = 0 \end{cases}$
En résolvant, on trouve $y = z, x = -z$ $\boxed{\text{1 point}}$

E_{-2} est de dimension 1 engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\dim E_3 + \dim E_{-2} = 2$ et par suite B n'est pas diagonalisable. $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On considère maintenant la matrice
$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

$\det P = 1 \neq 0$ et P est donc inversible. On trouve
$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$ et l'on vérifie que
$PP^{-1} = I$

4°. Les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont des vecteurs propres de B, associés respectivement à -2 et 3. En fait, le choix du vecteur $(1,-2,0)$ pour la première colonne de P permet d'obtenir un vecteur propre de B. Enfin, $v(\vec{j}) = \vec{\alpha} - 2\vec{j}$ et la matrice T de v dans la base est donc
$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dans cette base, elle est donc triangulaire $\boxed{\text{2 points}}$