

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.

Calculatrices interdites.

Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 8 points.

Déterminer la nature des séries numériques de terme général :

$$1^\circ. u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad 2^\circ. u_n = \frac{1}{n \ln n} \quad 3^\circ. u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$4^\circ. u_n = \frac{n!}{n^n} \quad 5^\circ. u_n = (-1)^n e^{-n} \quad 6^\circ. u_n = (-1)^n \sin \frac{1}{n}$$

II. 12 points.

On considère la fonction 2π -périodique, impaire, définie par $f(x) = x - \pi$ sur l'intervalle $]0, \pi[$.

1°. Donner l'allure de sa courbe représentative.

2°. Démontrer que la somme de sa série de Fourier est $S(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$

3°. Etudier la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ puis appliquer, en justifiant, le

théorème de Dirichlet pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

4°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en justifiant de sa convergence.

5°. On considère une fonction $f(x)$ 2π -périodique et intégrable. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ la primitive de $f(x)$ qui s'annule en $x = 0$. Exprimer les coefficients de Fourier $a_n(F)$ et $b_n(F)$ de $F(x)$ en fonction des coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de $f(x)$.

En déduire le développement en série de Fourier de la fonction 2π -périodique, paire, égale à $g(x) = x(\frac{x}{2} - \pi)$ sur l'intervalle $[0, \pi[$.