MATHEMATIQUES CR N°2 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2007/2008 -

Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices non alphanumériques autorisées. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 2 points.

Un logiciel utilise un mot de passe composé de 3 lettres (de A à Z sans distinction de casse) et de 4 chiffres (de 0 à 9).

1°. Combien existe-t-il de codes différents ?
Dans un mot de passe, les répétitions sont autorisées et l'ordre compte. On utilise donc des listes. Il y a 26 possibilités pour chaque lettre et 10 pour chaque chiffre. Au total on a donc : $26^3 \times 10^4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. On souhaite améliorer la protection en utilisant à la place des lettres n'importe quel code ascii (il en existe 128). Combien existe-t-il de codes ?
De la même façon que ci-dessus : $128^3 \times 10^4$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. On sait que parmi les 3 caractères, il y a deux $\sharp$. Combien existe-t-il de possibilités ? Il y $C_3^2 = 3$ façons de placer ces deux caractères. Le reste est identique aux deux questions précédentes : $6 \times 128 \times 10^4$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 3 points.

Les pannes d'un appareil électronique sont visualisées à l'aide d'un tableau de 8 leds numérotées de 1 à 8. En fonction de la nature de la panne, une ou plusieurs leds s'allument.

1°. Combien ce panneau permet-il de répertorier de pannes différentes ?
Un groupe de leds allumées correspond à un sous ensemble. Au total, on a donc $2^8 - 1 = 255$ pannes que l'on peut répertorier, car le cas où aucune led n'est allumée correspond à une absence de panne. Autre façon de répondre : chaque led a deux états possibles (allumée ou éteinte). Il y a $\underbrace{2 \times 2 \times 2 ... \times 2}_{8\times}$ états. $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Combien de pannes existe-t-il avec exactement 4 leds d'allumées ? Avec moins de 4 leds d'allumées ?
Il y a $C_8^4 = 70$ façons d'obtenir 4 leds allumées et $\sum_{k=1}^{3} C_8^k = 8 + 28 + 56 = 92$ façons d'en avoir moins de 4. Il faut utiliser des combinaisons car on s'intéresse uniquement à la place des leds allumées parmi les 8 leds. $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Le réparateur doit taper un code de 4 chiffres pour accéder au menu de diagnostic. La touche 5 est presque effacée, ce qui indique sans doute que un ou plusieurs 5 sont présents dans ce code. Combien reste-t-il de codes à tester ?

Il y a 4×10^3 codes avec un cinq, $C_4^2 \times 100$ avec deux cinq, etc. Au total, $4000 + 600 + 40 + 40 = 4680$ $\boxed{\text{1 point}}$

III. 2 points.

1°. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $2C_n^2 + 6C_n^3 = 4n$

$2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} + 6\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 4n$
$\iff n(n-1)^2 = 4n \iff n = 3$ ou $n = -1$. La seconde solution est impossible. On a donc $\mathcal{S} = \{3\}$ $\boxed{\text{2 points}}$

IV. 5 points.

On considère un dé normal et deux urnes A et B. A contient 2 boules noires et 4 vertes et B contient 3 noires et 3 vertes. On lance le dé : Si l'on fait $1, 2, 3$ ou 4, on tire une boule dans A, sinon on la tire dans B. On considère les évènements suivants :

A= "On a tiré une boule dans l'urne A" (idem pour B).
N= "On a tiré une boule noire" (idem pour V).

1°. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(N/A)$.
Par lecture directe de l'énoncé, $\mathbb{P}(A) = 4/6 = 2/3$ et $\mathbb{P}(N/A) = 2/6 = 1/3$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer en justifiant $\mathbb{P}(N)$ et $\mathbb{P}(B/N)$
La formule des probas totales donne

$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(N/B)\mathbb{P}(B) =$
$(1/3)(2/3) + (1/3)(1/2) = 7/18$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

Enfin, la formule de Bayes donne

$\mathbb{P}(N/A) = \dfrac{\mathbb{P}(A/N)\mathbb{P}(N)}{\mathbb{P}(A/N)\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(A/V)\mathbb{P}(V)}$
$= \dfrac{1/6}{7/18} = \dfrac{3}{7}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. Les évènements N et B sont-ils indépendants ? Pourquoi ? Sont-ils disjoints ? Pourquoi ?

Non car $\mathbb{P}(B) = 1/3 \neq \mathbb{P}(B/N)$. $\boxed{\text{0.5 point}}$
Non car
$\mathbb{P}(B \cap N) = \mathbb{P}(N/B)\mathbb{P}(B) = (1/2) \times (1/3) = 1/6 \neq 0$.
$\boxed{\text{0.5 point}}$

V. 8 points.

On dispose de deux urnes U et V. U comporte a boules blanches et b boules noires. V comporte b boules blanches et a boules noires. Les tirages s'effectuent avec remise. On note U_n l'évènement "le $n$ième tirage a lieu dans U" et B_n l'évènement "la nième boule est blanche". Si à l'étape n on a tiré une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectuera dans U, sinon il s'effectuera dans V. Le premier tirage s'effectue toujours dans U. On pose enfin $v_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1°. Par lecture directe de l'énoncé $\mathbb{P}(B_n/U_n) = \dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}(B_n/V_n) = \dfrac{b}{a+b}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. De même, et puisque les tirages se font avec remise, $\mathbb{P}(B_{n+1}/B_n) = \dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}(B_{n+1}/\overline{B_n}) = \dfrac{b}{a+b}$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) u_n + \frac{b}{a+b}$$

Nous appliquons la formule des probas totales :
$u_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}/B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}/\overline{B_n})(1 - \mathbb{P}(B_n))$
$= \dfrac{a}{a+b}u_n + \dfrac{b}{a+b}(1-u_n) = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right) u_n + \dfrac{b}{a+b}$
$\boxed{\text{1.5 points}}$

4°. On pose $v_n = u_n - 1/2$ pour tout n. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) v_n$$

$$v_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) u_n + \frac{b}{a+b} - \frac{1}{2}$$
$$= \left(\frac{a-b}{a+b}\right)(v_n + 1/2) + \frac{b}{a+b} - \frac{1}{2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) v_n$$

$\boxed{\text{1.5 points}}$

5°. On $v_0 = 1/2$. En multipliant les n équations ci-dessus pour n variant de 0 à $n-1$, on a $\Rightarrow v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{n-1}$

$\boxed{\text{1 point}}$

6°. On voit clairement que $q = |(a-b)/(a+b)| < 1$, de sorte q^{n-1} tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et puisque $u_n = v_n - 1/2$, $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{0.5 point}}$

7°. On change de règle : si à l'étape n on tire une boule blanche, alors le tirage suivant s'effectue dans la même urne ; sinon on change d'urne. Calculer $\mathbb{P}(U_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n \geq 1$. En appliquant à nouveau la formule des probas totales, il vient :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n/U_n)\mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(\bar{B}_n/V_n)\mathbb{P}(V_n) = \frac{a}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_n/U_n)\mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_n/V_n)\mathbb{P}(V_n) = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$$

$\boxed{\text{1 point}}$

Quelle est la meilleure règle de conduite si l'objectif est de tirer des boules blanches ?

$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \geq \dfrac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2)} \geq \dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$