MATHEMATIQUES CR N°2

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2008/2009 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 14 points.

Soit u l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.
2°. A est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser sa forme diagonale.
3°. On considère maintenant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

4°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

II. 7 points.

Soit v l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.
2°. B est-elle diagonalisable ?
3°. Déterminer $v(\vec{j})$, $v(\vec{i} + \vec{j})$ et $v(\vec{j} + \vec{k})$
4°. En déduire une base où la matrice T de v est sous forme triangulaire et préciser T.