MATHEMATIQUES CR N°2 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2008/2009

- Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 14 points.

Soit u l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de A, en précisant base et dimension pour chaque espace.

$P(x) = \det(A - xI) = -(x-3)^2(x-2)$ $\boxed{\text{1 point}}$

$Sp(A) = \{2, 3\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Un vecteur $\vec{X}(x, y, z)$ appartien à E_2 ssi $x = y = -z$. De même, un tel vecteur appartient à E_3 ssi $x - y + z = 0$. On peut donc écrire :

$E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{2 points}}$

$E_3 = \text{vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ qui est de dimension 2

$\boxed{\text{2 points}}$

2°. A est-elle diagonalisable ?

$\dim E_2 + \dim E_3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ et la matrice est donc diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

Sa forme diagonale dans la base précédente (les vecteurs propres étant placés dans l'ordre où ils apparaissent dans le corrigé) est donnée par $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On considère maintenant la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

$\det P = -1 \neq 0$ donc P est diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

Après calculs, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$

4°. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $A = PDP^{-1}$, donc que $A^n = PD^nP^{-1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Ainsi, $A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times 3^n & 2^n - 3^n & -2^n + 3^n \\ -2^n + 3^{n+1} & 2^n & -2^n - 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 3^n & 2^n \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$

II. 7 points.

Soit v l' application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1°. Déterminer les valeurs et sous espaces propres de B, en précisant base et dimension pour chaque espace.

En procédant de la même façon que dans l'exercice précédent, on trouve $P(x) = (2-x)^2(1-x)$ $\boxed{\text{1 point}}$
Les valeurs propres sont donc 2 et 1.

Un vecteur $\vec{X}(x, y, z)$ appartien à E_2 ssi $x = z = 0$. De même, un tel vecteur appartient à E_1 ssi $x = y$ et $z = 0$. On peut donc écrire :

$E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1 point}}$

$E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est de dimension 1 $\boxed{\text{1 point}}$

2°. B est-elle diagonalisable ?

$\dim E_2 + \dim E_1 = 2$ et la matrice n'est donc pas diagonalisable $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Déterminer $v(\vec{j})$, $v(\vec{i} + \vec{j})$ et $v(\vec{j} + \vec{k})$

Notons $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j}$
$v(\vec{j}) = 2\vec{j}$, $v(\vec{i} + \vec{j}) = (1, 1, 0) = \vec{i} + \vec{j} = \vec{\alpha}$,
$v(\vec{j} + \vec{k}) = (0, 3, 2) = \vec{j} + (\vec{j} + \vec{k})$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. En déduire une base où la matrice T de v est sous forme triangulaire et préciser T.

D'après ce qui précède, $\vec{j}$ et $\vec{\alpha}$ sont des vecteurs propres de v. Dans la base $\{\vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{j} + \vec{k}\}$ la matrice sera

$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{2 points}}$