MATHEMATIQUES CR N°2 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 22/10/2009

- Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Le barème est indicatif et sans engagement.
Les exercices sont indépendants. Il est conseillé de traiter l'exercice III en dernier.

I. 5 points.

Un code comprend 6 lettres (parmi 52, car on distingue majuscules et minuscules) suivies de 4 chiffres entre 0 et 9.

1°. Combien existe-t-il de codes différents ?

$52^6 \times 10^4$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Parmi les lettres, il y a trois E mais on ne sait pas où. De plus, on sait que les chiffres sont tous distincts. Combien y a-t-il de codes possibles ?

$C_6^3 \times 51^3 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $C_n^0 + 2 \times C_n^1 + 4 \times C_n^2 + ... + 2^n \times C_n^n$
$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = (2+1)^n = 3^n$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $C_n^2 + \frac{1}{n} C_n^3 = 1$

$\iff 3n(n-1) + (n-1)(n-2) = 6$
$\iff 2n^2 - 3n - 2 = 0$
$\Delta = 25$ et les deux solutions sont $-1/2$ et 2. La première n'est pas un entier et la seconde est inférieure à 3, donc C_n^3 ne peut pas exister. Par conséquent, il n'y a pas de solution $\boxed{\text{2 points}}$

II. 7 points.

On note U et V deux urnes. U contient 9 boules blanches et 3 noires, V contient 2 boules blanches et 2 noires. On place toutes les boules dans une même urne et on tire une boule au hasard. On constate qu'elle est blanche.

On note U l'évènement "la boule provient de U" et B l'évènement la boule est blanche".

1°. Traduire l'énoncé en termes probabilistes.

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(U) = 3/4$ et $\mathbb{P}(V) = 1/4$ $\boxed{\text{1 point}}$
De même, $\mathbb{P}(B/U) = 3/4$, $\mathbb{P}(N/U) = 1/4$, $\mathbb{P}(B/V) = 1/2$ et $\mathbb{P}(N/V) = 1/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. D'après la formule des probas totales,
$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/U)\mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(B/V)\mathbb{P}(V)$
$= 3/4 \times 3/4 + 1/2 \times 1/4 = 11/16$ $\boxed{\text{1 point}}$

D'après la formule de Bayes, $\mathbb{P}(U/B) = \frac{\mathbb{P}(B/U)\mathbb{P}(U)}{\mathbb{P}(B)}$

$= (9/16)/(11/16) = 9/11$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Les évènements U et B sont-ils indépendants ? Sont-ils disjoints ?

$\mathbb{P}(U/B) \neq \mathbb{P}(U)$ et donc les évènements ne sont pas indépendants $\boxed{\text{1 point}}$
$\mathbb{P}(U \cap B) = \mathbb{P}(U/B)\mathbb{P}(B) \neq 0$ ils ne sont donc pas disjoints non plus $\boxed{\text{1 point}}$

III. 8 points.

Une urne contient 3 boules noires, 4 blanches et 1 jaune. On tire une première boule en notant sa couleur. Si elle est jaune, on la garde et on en tire une seconde. Sinon, on remet la boule et on en tire une seconde.

1°. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au seconde tirage ? Et une jaune ?

On notera évidemment N_i l'évènement "boule noire au ième tirage", B_i l'évènement "boule blanche au ième tirage" et J_i pour "boule jaune au ième tirage", avec $i = 1, 2$.

On applique la formule des probas totales :

$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_2/N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(N_2/B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(N_2/J_1)\mathbb{P}(J_1)$

$= (3/8) \times (3/8) + (3/8) \times (4/8) + (3/7) \times (1/8)$

$= \frac{63 + 63 + 12}{8 \times 8 \times 7} = \frac{171}{448}$ $\boxed{\text{2 points}}$

De la même façon,
$\mathbb{P}(J_2) = \mathbb{P}(J_2/N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(J_2/B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(J_2/J_1)\mathbb{P}(J_1)$
$= (1/8) \times (3/8) + (1/8) \times (4/8) + 0 = \frac{7}{64}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. On tire une boule blanche au second tirage. Quelle est la probabilité qu'une boule blanche ait été tirée au premier tirage ? Et une jaune ?

D'après la formule de Bayes
$\mathbb{P}(B_1/B_2) = \frac{\mathbb{P}(B_2/B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(B_2)}$

$= \frac{(4/8) \times (4/8)}{(4/8) \times (4/8) + (4/7) \times (1/8) + (4/8) \times (3/8)} = \frac{8}{57}$
$\boxed{\text{2 points}}$

3°. Les évènements N_1 ="boule noire au premier tirage" et N_2 ="boule noire au second tirage" sont-ils indépendants ?

$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_2/N_1)\mathbb{P}(N_1) = 9/64$ et donc les évènements ne sont pas indépendants $\boxed{\text{1 point}}$
D'après ci-dessus, $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) \neq 0$ ils ne sont donc pas disjoints non plus $\boxed{\text{1 point}}$