MATHEMATIQUES CR N°3 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage- Mardi 12 Février - 2007/2008 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points.

Déterminer la nature des séries numériques de terme général donné par :

Toutes ces séries sont à termes positifs et l'on peut donc appliquer les critères $\boxed{\text{0.5 point}}$

1°. e^{-n}

On applique le critère de Cauchy : $u_n^{1/n} = 1/e < 1$ et donc $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $\dfrac{n^2}{n!}$

On applique le critère de D'Alembert
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^2} = \dfrac{n+1}{n^2}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par suite, $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $(1 - \dfrac{1}{n})^{n^2}$

On applique le critère de Cauchy : $u_n^{1/n} = (1-1/n)^n$. Il s'agit d'une forme indéterminée et pour calculer sa limite il faut passer à la forme exponentielle :
$(1-1/n)^n = \exp(n \ln(1-1/n))$ qui tend vers $1/e < 1$
Par suite, $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $\dfrac{1}{\sqrt{n^2(n-1)}}$

Appliquons le critère d'équivalence : $u_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$ qui est de la forme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Par suite $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

5°. $\dfrac{1}{n(\ln n)^2}$

Appliquons le critère de comparaison à une intégrale. La fonction $\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ est positive, décroissante et tend vers 0 en l'infini. Par ailleurs, sa primitive est $U(x) = -1/\ln(x)$ qui tend vers 0 en l'infini. Par suite $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

II. 10 points.

On considère la fonction 2π-périodique paire définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$

1°. Tracer l'allure de sa courbe représentative et déterminer sa série de Fourier $S(x)$.

Il s'agit d'un arc de parabole sur l'intervalle considéré. On translate cet arc pour obtenir la courbe, qui ressemble à une suite d'arcades $\boxed{\text{1 point}}$

Comme f est paire, $b_n = 0\ \forall n$ $\boxed{\text{0.5 point}}$. Par ailleurs, $a_0 = \dfrac{\pi^2}{3}$ $\boxed{\text{1 point}}$ et après calcul, $a_n = 4\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Par suite, $S(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

2°. La fonction vérifie-t-elle les hypothèses du théorème de Dirichlet ?

Oui ! Car elle admet une demi-dérivée à droite et à gauche en tout point (elle est en plus continue sur $\mathbb{R}$).
$\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. Appliquer le théorème de Dirichlet pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, en justifiant sa convergence.

On l'applique en $x = 0$. Il vient

$$f(0) = S(0) \iff 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \boxed{\text{2 points}}$$

La série est une série alternée convergente car $1/n^2 > 0$, décroissant et tend clairement vers 0 $\boxed{\text{0.5 point}}$

4°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4}$, en justifiant sa convergence.

Après un calcul classique, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$

$\boxed{\text{2 points}}$

La série est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ $\boxed{\text{0.5 point}}$.

III. 5 points.

1°. Soit $f(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t)$. Calculer explicitement $\hat{f}(u)$

Un calcul fait cent fois en TD donne $\hat{f}(u) = \dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}$
$\boxed{\text{1 point}}$

2°. Soit $g(t) = e^{-|t|}$ et $h(t) = e^{-\omega|t|}$ pour $\omega > 0$
Rappeler l'expression de $\hat{g}(u)$ et en déduire $\hat{h}(u)$

$\hat{g}(u) = \dfrac{2}{1 + (2\pi u)^2}$ d'après le cours. En utilisant la propriété de dilatation, on a alors $\hat{h}(u) = \dfrac{2\omega}{\omega^2 + (2\pi u)^2}$

$\boxed{\text{2 points}}$

3°. Résoudre l'équation différentielle
$y''(t) - \omega^2 y(t) = 2\omega\delta(t)$
où $\delta(t)$ représente la masse de Dirac en 0.

En passant à la transformée de Fourier, on obtient
$-(2\pi u)^2 \hat{y}(u) - \omega^2 \hat{y}(u) = 2\omega$
$\Rightarrow \hat{y}(u) = -\dfrac{2\omega}{\omega^2 + (2\pi u)^2}$ et donc $y(t) = -h(t)$ $\boxed{\text{2 points}}$