MATHEMATIQUES CR N°3

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2008/2009 - Durée : 1h - Le 26/01/09

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 6 points

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est donnée par :

$F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = \sqrt{x}$ si $0 \leq x < 1$ et $F(x) = 1$ si $x \geq 1$.

1°. Déterminer la densité $f(x)$ de X et calculer $\mathbb{P}[X \leq 1/4]$.
2°. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{var}(X)$

3°. Soit $Y = \sqrt{X}$. Déterminer la fonction de répartition $G(s)$ de Y et en déduire sa densité $g(x)$.

II. 5 points.

La durée de vie d'un composant électronique, exprimée en années, est une variable aléatoire T de densité $f(t)$ donnée par $f(t) = \alpha e^{-2t}$ si $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ sinon.

1°. Calculer α pour que $f(t)$ soit une densité de probabilité. Calculer $\mathbb{E}[T]$ et $\mathrm{var}(T)$.
2°. Calculer $\mathbb{P}[T \geq 1]$
3°. On considère un lot de 200 composants identiques et indépendants et l'on note X le nombre de composants en état de fonctionnement au delà d'une année. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{P}[X \geq 30]$ et $\mathbb{P}[23 \leq X \leq 33]$ (on prendra $\sigma = 5$).

III. 6 points.

Un central reçoit des appels avec une fréquence λ par unité de temps. On suppose que ces appels arrivent indépendamment les uns des autres.

Soit X_t le nombre d'appels durant un intervalle de temps de durée t. Soit Y la durée entre deux appels consécutifs. On admet que X_t suit une loi de Poisson de paramètre λt

1°. Calculer la probabilité d'avoir au moins un appel dans l'intervalle $[0, t]$?
2°. Quel est le nombre moyen d'appel entre 0 et t ?
3°. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
4°. Comparer les évènements $[X_t = 0]$ et $[Y > t]$. En déduire l'expression de la fonction de répartition $F(t)$ de Y ainsi que sa densité $f(t)$. En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
5°. Quel est l'écart moyen entre deux appels ?
6°. Si $\lambda = 1$, calculer $\mathbb{P}[Y \geq 1]$ et $\mathbb{P}[Y = 5]$

IV. 3 points

L'éclairage d'une commune est assuré par 2000 lampes d'une durée de vie moyenne de 1000 heures. Des tests ont montré que la durée de vie de ces lampes suit une loi normale de moyenne $m = 1000h$ et d'écart type $\sigma = 200h$. Déterminer :

1°. La probabilité qu'une lampe soit hors d'usage après $700h$; en déduire le nombre moyen de lampes hors d'usage après $700h$.
2°. La probabilité qu'une lampe soit hors d'usage entre la 900ième et la 1300ième heure.
3°. Le nombre d'heures écoulées pour que 10% des lampes soient hors d'usage.