MATHEMATIQUES CR N°3 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2008/2009

- Durée : 1h - Le 26/01/09

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 6 points

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est donnée par :

$F(x) = 0$ si $x < 0$, $F(x) = \sqrt{x}$ si $0 \leq x < 1$ et $F(x) = 1$ si $x \geq 1$.

1°. Déterminer la densité $f(x)$ de X et calculer $\mathbb{P}[X \leq 1/4]$.

$f(x) = F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ si $x \in]0,1[$ et 0 à l'extérieur.

$\boxed{\text{1 point}}$

$\mathbb{P}[X \leq 1/4] = F(1/4) = 1/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\mathbb{E}[X^2] = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{3/2}dx = \frac{1}{2}\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

et $\mathrm{var}(X) = 1/5 - 1/9 = 4/45$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. Soit $Y = \sqrt{X}$. Déterminer la fonction de répartition $G(s)$ de Y et en déduire sa densité $g(x)$.

$G(s) = \mathbb{P}[Y \leq s] = \mathbb{P}[\sqrt{X} \leq s] = \mathbb{P}[X \leq s^2] = s$ sur $]0,1[$, 0 avant et 1 après.
$g(x) = G'(x) = 1$ sur $]0,1[$ et 0 ailleurs. Il s'agit d'une loi uniforme sur $[0,1]$ $\boxed{\text{2 points}}$

II. 5 points.

La durée de vie d'un composant électronique, exprimée en années, est une variable aléatoire T de densité $f(t)$ donnée par $f(t) = \alpha e^{-2t}$ si $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ sinon.

1°. Calculer α pour que $f(t)$ soit une densité de probabilité. Calculer $\mathbb{E}[T]$ et $\mathrm{var}(T)$.

La fonction f est positive (si $\alpha \geq 0$) et continue par morceaux. C'est une densité de proba ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \alpha\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \alpha/2.$

Ainsi $\alpha = 2$ $\boxed{\text{1 point}}$

$\mathbb{E}[T] = \displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)dt = 1/2$ après intégration par partie et $\mathrm{var}(T) = 1/4$ également après calcul $\boxed{\text{1 point}}$

On pouvait également obtenir ces deux points simplement en connaissant son cours : La densité est celle d'une loi exponentielle de paramètre α. Cela donnait immédiatement $\alpha = 2$ et l'on sait que la moyenne vaut $1/\alpha$ et la variance $1/\alpha^2$.

2°. $\mathbb{P}[T \geq 1] = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt = 1/e^2 \simeq 0,14$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. On considère un lot de 200 composants identiques et indépendants et l'on note X le nombre de composants en état de fonctionnement au delà d'une année. Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{P}[X \geq 30]$ et $\mathbb{P}[23 \leq X \leq 33]$ (on prendra $\sigma = 5$).

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,14$ comme somme de variables de Bernoulli indépendantes (un composant est défectueux ou non).
On ne peut pas appliquer la loi des évènements rares, mais par contre, comme $npq \simeq 24 \geq 18$, on peut appliquer le théorème de la limite centrale : X suit donc à peut près une loi normale de paramètre $m = np = 28$ et $\sigma = 5$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

$\mathbb{P}[X \geq 30] = \mathbb{P}[Z \geq 2/5] = 1 - \Pi(0,4) = 1 - 0,65 \simeq 0,35$
$\mathbb{P}[23 \leq X \leq 33] = \mathbb{P}[-1 \leq Z \leq 1] = 2\Pi(1) - 1 \simeq 0,68$
$\boxed{\text{1,5 points}}$

III. 6 points.

Un central reçoit des appels avec une fréquence λ par unité de temps. On suppose que ces appels arrivent indépendamment les uns des autres.

Soit X_t le nombre d'appels durant un intervalle de temps de durée t. Soit Y la durée entre deux appels consécutifs. On admet que X_t suit une loi de Poisson de paramètre λt

1°. Calculer la probabilité d'avoir au moins un appel dans l'intervalle $[0,t]$?

$\mathbb{P}[X_t \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[X_t = 0] = 1 - e^{-\lambda t}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Quel est le nombre moyen d'appel entre 0 et t ?

$\mathbb{E}[X_t] = \lambda t$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?

Y prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,+\infty[$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

4°. Comparer les évènements $[X_t = 0]$ et $[Y > t]$. En déduire l'expression de la fonction de répartition $F(t)$ de Y ainsi que sa densité $f(t)$. En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Ces deux évènements sont égaux. Il suffit de les décrire en français pour s'en rendre compte $\boxed{\text{1 point}}$

$F(t) = \mathbb{P}[Y \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$ et 0 sinon.
$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$ et 0 sinon. Y suit donc une loi exponentielle de paramètre λ $\boxed{\text{1 point}}$

5°. Quel est l'écart moyen entre deux appels ?

$\mathbb{E}[Y] = 1/\lambda$ $\boxed{\text{1 point}}$

6°. Si $\lambda = 1$, calculer $\mathbb{P}[Y \geq 1]$ et $\mathbb{P}[Y = 5]$

$\mathbb{P}[Y = 5] = 0$ car la loi est à densité et

$\mathbb{P}[Y \geq 1] = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt = 1/e$ $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 3 points

L'éclairage d'une commune est assuré par 2000 lampes d'une durée de vie moyenne de 1000 heures. Des tests ont montré que la durée de vie de ces lampes suit une loi normale de moyenne $m = 1000h$ et d'écart type $\sigma = 200h$. Déterminer :

1°. La probabilité qu'une lampe soit hors d'usage après $700h$; en déduire le nombre moyen de lampes hors d'usage après $700h$.

Soit D la durée de vie d'une lampe. Dire qu'une lampe est hors d'usage après $700h$ d'utilisation revient à dire que son espérance de vie est inférieure ou égale à $700h$. Ainsi, on veut calculer $\mathbb{P}[D < 700] = \mathbb{P}[Z < -1.5]$ où Z suit une loi normale centrée réduite.

$\mathbb{P}[D < 700] = \mathbb{P}[Z < -1.5] = 1 - \Pi(1.5) \simeq 0.07$ $\boxed{\text{1 point}}$

Le résultat est crédible car la moitié des lampes a une durée de vie de 1000 heures. Il est donc normal que peu de lampes soient défectueuses avant $700h$.

Soit X le nombre de lampes qui sont hors d'usage après $700h$. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2000$ et $p = 0.07$ comme nombre de succès au cours de n expériences de Bernoulli indépendantes. Le fait qu'une lampe fonctionne ou pas au-delà des $700h$ est une expérience de Bernoulli et les lampes peuvent être considérées comme indépendantes. On a alors
$\mathbb{E}[X] = np = 140$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. La probabilité qu'une lampe devienne hors d'usage entre la 900ième et la 1300ième heure est :

$\mathbb{P}[900 < D < 1300] = \mathbb{P}[-0.5 < Z < 1.5] = \Pi(1.5) + \Pi(0.5) - 1 \simeq 0.77$
$\boxed{\text{1 point}}$

3°. Le nombre d'heures écoulées pour que 10% des lampes soient hors d'usage.

La moitié des lampes est hors d'usage en moyenne à 1000 h. On s'attend donc à trouver un nombre d'heures inférieur à 1000. Nous cherchons donc α tel que :

$\mathbb{P}[D < \alpha] = 0.1$
$\iff \Pi(\frac{\alpha - m}{\sigma}) = 0,1 \iff \Pi(\frac{m - \alpha}{\sigma}) = 0,9$
$\iff \Pi(\frac{m - \alpha}{\sigma}) = \Pi(1.28) \iff -\alpha = 1.28 \times \sigma - m$
$\iff \alpha = 1000 - 1.28 \times 200 \simeq 744$ heures. $\boxed{\text{1 point}}$