Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrice interdite.
On peut admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante.
Durant tout le devoir la fonction $H(t)$ représentera la fonction échelon de Heaviside : $H(t) = 1_{[0,+\infty[}(t)$

I. 4 points.

Tracer la courbe représentative des fonctions ci-dessous, puis à l'aide de la définition, calculer leur transformée de Laplace.

1°. $f(t) = H(t) + H(t-1)$ 2°. $g(t) = t \times 1_{[0,1[}(t) + (2-t) \times 1_{[1,2[}(t)$

II. 4 points.

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1°. $tH(t)$ 2°. $te^{-t}H(t)$ 3°. $t\cos(t)H(t)$ 4°. $e^{-2t}\cos(3t)H(t)$

III. 5 points.

Calculer les originaux des fonctions suivantes :

1°. $\dfrac{1}{(p+3)(p+1)}$ 2°. $\dfrac{2p+1}{p^2-4p-5}$ 3°. $\dfrac{1}{p^2+p+1}$

IV. 6 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de Laplace :

1°. $\begin{cases} y'(t) - y(t) = e^{-t}H(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 2°. $\begin{cases} y''(t) + y'(t) = \sin(t)H(t) \\ y(0) = 1; y'(0) = 0 \end{cases}$

V. 2 points.

On considère une cellule RC d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, deux fonctions causales. On admet qu'elle est pilotée par l'équation différentielle

$$RCy'(t) + y(t) = x(t)$$

1°. Soit $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$ et $X(p)$ celle de $x(t)$. Exprimer Y en fonction de X.
2°. Déterminer $y(t)$ si $x(t) = \delta(t)$, masse de Dirac en 0.