R&T 2nde année FA - **MATHEMATIQUES CR N°4 - Corrigé**
2006/2007 - 5 Mars 2007 - Durée 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrice interdite.
On peut admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante.
Durant tout le devoir la fonction $H(t)$ représentera la fonction échelon de Heaviside : $H(t) = 1_{[0,+\infty[}(t)$

I. 4 points.

Tracer la courbe représentative des fonctions ci-dessous, puis à l'aide de la définition, calculer leur transformée de Laplace.

1°. $f(t) = H(t) + H(t-1)$

$H(t) = 1 \iff t \geq 0$ et $H(t-1) = 0 \iff t \geq 1$; ansi, $f(t)$ est une fonction nulle si $t < 0$, égale à 1 sur $[0, 1[$ et égale à 2 si $t \geq 2$. $\boxed{\text{1 point}}$

On a $F(p) = \frac{1}{p} + e^{-p}\frac{1}{p}$ en calculant l'intégrale ou bien en utilisant le tableau $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $g(t) = t \times 1_{[0,1[}(t) + (2-t) \times 1_{[1,2[}(t)$

$g(t)$ est une fonction triangle qui est nulle à l'extérieur de $[0, 2]$ et qui vaut 1 en $t = 1$ $\boxed{\text{1 point}}$

$G(p) = \int_0^1 te^{-pt}dt + \int_1^2 (2-t)e^{-pt}dt = \frac{1}{p}(1-e^{-p})^2$ en effectuant une intégration par parties $\boxed{\text{1 point}}$

II. 4 points.

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1°. $tH(t) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p^2}$

En dérivant $-1/p$ par rapport à p $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $te^{-t}H(t) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$

En utilisant les propriétés de la transfo $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $t\cos(t)H(t) \Rightarrow F(p) = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$

la transfo de $\cos tH(t)$ est $G(p) = p/(p^2+1)$; ainsi, $F(p) = -G'(p)$ $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $e^{-2t}\cos(3t)H(t) \Rightarrow F(p) = \frac{p+2}{(p+2)^2+9}$

En utilisant le tableau des transfos usuelles $\boxed{\text{1 point}}$

III. 5 points.

Calculer les originaux des fonctions suivantes :

1°. $F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+3}\right)$

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})H(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $F(p) = \frac{2p+1}{p^2-4p-5} = \frac{1}{6}\frac{1}{p+1} + \frac{11}{6}\frac{1}{p-5}$

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{6}(e^{-t} + 11e^{5t})H(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°.
$F(p) = \frac{1}{p^2+p+1} = \frac{1}{(p+1/2)^2+3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(p+1/2)^2+3/4}$

$\Rightarrow f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-t/2}H(t)$

Déjà fait en td... $\boxed{\text{2 points}}$

IV. 6 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de Laplace :

1°. $\begin{cases} y'(t) - y(t) = e^{-t}H(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

En passant à la transformée de Laplace dans les deux membres, il vient :

$pY - p = \frac{1}{p+1} \Rightarrow Y = \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1})$

$\boxed{\text{1 point}}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})H(t) = \sinh(t)H(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\begin{cases} y''(t) + y'(t) = \sin(t)H(t) \\ y(0) = 1; y'(0) = 0 \end{cases}$

$p^2Y - p + pY - 1 = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow Y(p) = \frac{1+(p+1)(p^2+1)}{p(p+1)(p^2+1)}$

$\boxed{\text{1 point}}$

$= \frac{2}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2}\frac{p+1}{p^2+1}$

En outre, $\frac{p+1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}$ $\boxed{\text{2 points}}$

$\Rightarrow f(t) = (2 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t))H(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$

V. 2 points.

On considère une cellule RC d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, deux fonctions causales. On admet qu'elle est pilotée par l'équation différentielle

$$RCy'(t) + y(t) = x(t)$$

1°. Soit $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$ et $X(p)$ celle de $x(t)$. Exprimer Y en fonction de X.

$RC(pY - y(0)) + pY = X$ et comme y est causale, $y(0) = 0$

$\Rightarrow Y(p) = \frac{X(p)}{RCp+1}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Déterminer $y(t)$ si $x(t) = \delta(t)$, masse de Dirac en 0.

En ce cas, $X(p) = 1$ et $y(t)$ est l'original de $\frac{1}{RCp+1}$, cad $y(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}H(t)$ $\boxed{\text{1 point}}$