MATHEMATIQUES CR N°4

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage

2007/2008 - Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.
La notation tiendra compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.

I. 4 points.

Déterminer le domaine de définition des fonctions ci-dessous et calculer leurs dérivées partielles par rapport à chaque variable.

1°. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ (x,y) \mapsto f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2/\{(x,y)/ \ x \neq y\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{(x+y)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{(x+y)^2}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \ (x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ -e^{x-y} \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 8 points.

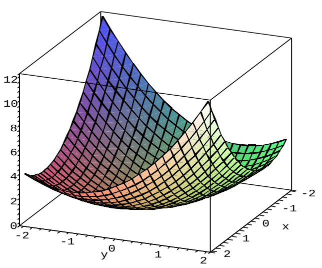
Déterminer les points critiques des fonctions ci-dessous et en déduire, en justifiant et en rédigeant, les maxima et les minima locaux de $f(x,y)$.

1°. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$

Le seul point où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément est $(0,0)$, qui est donc le seul point critique de la fonction. La matrice hessienne est donc $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est symétrique donc diagonalisable et ses valeurs propres sont (après calculs) 1 et 3. Par suite, $(0,0)$ est un minimum $\boxed{\text{3 points}}$



2°. $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3x^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3y^2$

Ces deux fonctions sont nulles si $y = x^2$ et $x = y^2$ cad $y = y^4$ ie $y(y^3 - 1) = 0$

Ainsi, $y = 0$ ou $y = 1$. Les deux points critiques de la fonction sont $(0,0)$ et $(1,1)$ $\boxed{\text{1 point}}$

Les dérivées partielles seconde sont :

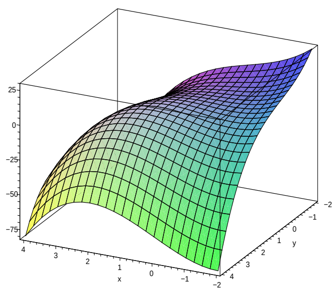
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6y$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3$ et la matrice hessienne de f en (x,y) est donc :

$H = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

• Au point $(0,0)$ cette matrice est $H = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 3 et -3. Puisque ces valeurs sont de signes contraires, il ne s'agit pas d'un extremum mais d'un point selle $\boxed{\text{1.5 points}}$

• Au point $(1,1)$ cette matrice est $H = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est $P(x) = (-6-x)^2 - 9 = (3+x)(9+x)$ dont les racines sont -9 et -3. Puisque ces valeurs sont négatives, il s'agit d'un maximum local $\boxed{\text{1.5 points}}$



III. 8 points.

On considère une onde transverse électrique qui se propage dans le vide. Cette onde crée un champ électrique en $M(x,y,z)$ qui est défini par la fonction suivante :

$$E : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ / \ (x,y,z) \longrightarrow E(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(z)\cos(\omega t - kx) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1°. Expression du champ magnétique $B(x,y,z)$ au point $M(x,y,z)$.

On obtient $B(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\phi'(z)\sin(wt - kx) \\ 0 \\ -\frac{k}{\omega}\phi(z)\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{2 points}}$

2°. Vérifier les deux équations de Maxwell $\mathrm{div}E = 0$ et $\mathrm{div}B = 0$

Le calcul donne bien 0 $\boxed{\text{2 points}}$

3°. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ E) = \mathrm{rot}\left(-\dfrac{\partial B}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\ B)$

$= -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}\right) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

Ainsi, d'après la relation précédente, puisque $\mathrm{div} E = 0$, il vient $\Delta E = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Même démonstration pour B.

4°. Nous allons effectuer le calcul de $\mathrm{rot}(\mathrm{rot} E)$ d'une part et celui de $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ E) - \Delta E$ d'autre part et constater que ces deux vecteurs sont identiques. Pour cela, il suffit de faire le calcul sur une seule coordonnée. En effet, par permutation circulaire on obtiendra le résultat sur les deux autres coordonnées.

La première coordonnée de $\mathrm{rot}(\mathrm{rot} E)$ est

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2}.$$

La première coordonnée de $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ E) - \Delta E$ est la même. On en déduit le résultat demandé $\boxed{\text{2 points}}$