MATHEMATIQUES CR N°4

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2008/2009

- Durée : 1h - Le 04/02/09

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 14 points

Déterminer la nature des séries numériques dont le terme général u_n est donné par :

1°. $u_n = (-1)^n$

u_n n'a pas de limite quand n tend vers l'infini. En particulier, u_n ne tend pas vers 0 et la série DV $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $u_n = e^{-n\sqrt{n}}$

La série est clairement à termes positifs, on peut donc appliquer les critères de convergence $\boxed{\text{1 point}}$

$u_n^{1/n} = e^{-\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 en l'infini. D'après le critère de Cauchy, $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

3°. ne^{-n^2}

La série est à termes positifs. Posons $u(x) = xe^{-x^2}$. Une primitive de $u(x)$ est $U(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ qui tend vers 0 quand x tend vers l'infini. D'après le critère de comparaison à une intégrale, $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{1 point}}$

4°. $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

La série est à termes positifs. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 3/2 > 1$. Il s'agit donc d'une série de Riemann convergente $\boxed{\text{1 point}}$

5°. $\dfrac{1}{n \ln n}$

La série est à termes positifs et nous appliquons à nouveau le critère de comparaison à une intégrale : $U(x) = \ln \ln x$ qui tend vers l'infini avec x. Par suite, $\sum u_n$ DV $\boxed{\text{1 point}}$

6°. $\dfrac{n!}{n^n}$

La série est à termes positifs. Appliquons le critère de D'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \dfrac{n^n}{n!}$
$= \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n = \exp\left(n \ln(1 - \dfrac{1}{n+1})\right)$
En appliquant la règle de l'Hospital, l'expression précédente tend vers $e^{-1} < 1$ et d'après le critère $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{3 points}}$

7°. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Il s'agit clairement d'une série alternée de la forme $(-1)^n v_n$ avec $v_n = 1/\sqrt{n}$ qui est positif, décroissant et tend vers 0 en l'infini. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum u_n$ CV $\boxed{\text{2 points}}$

8°. $(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

Le terme général de cette série n'a pas de limite en l'infini. En particulier, il ne tend pas vers 0 et la série DV $\boxed{\text{1 point}}$

9°. e^{-nx}

La série est à termes positifs et l'on peut appliquer le critère de Cauchy : $u_n^{1/n} = e^{-x}$ qui est inférieur à 1 ssi $x > 0$; en ce cas, la série CV. Si $x \leq 0$, la série DV $\boxed{\text{2 points}}$

II. 6 points.

Soit $u_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

1°. Déterminer la nature de la série de terme général u_k.

La série est à termes positifs et l'on peut donc appliquer les critères $\boxed{\text{0.5 point}}$

$u_k \leq \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. D'après le critère de majoration, $\sum u_k$ CV $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. Décomposer u_k en éléments simples et en déduire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

$u_k = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$ en appliquant le théorème des résidus $\boxed{\text{1 point}}$

$S_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + ... + (\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}) + (\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1})$
$= 1 - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} \to 1$ quand $n \to +\infty$ $\boxed{\text{3 points}}$