MATHEMATIQUES CR N°5 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2007/2008

- Durée : 1h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 11 points.

Calculer les intégrales ci-dessous :

1°. $I = \int\int_D \frac{x^2}{1+y^2}\, dxdy$ avec
$D = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1\}$

$$I = \int_0^1 x^2 dx \times \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3} \times \arctan 1 = \boxed{\frac{\pi}{12}}$$

2 points

2°. $I = \int\int_D xy\ dxdy$ avec
$D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x+y \le 1\}$

$$I = \int_0^1 x(\int_0^{1-x} ydy)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2 dx = \boxed{\frac{1}{24}}$$

2 points

3°. $I = \int\int\int_D dxdydz$ avec
$D = \{(x,y,z)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ z \ge 0\ ;\ x+y+z \le 1\}$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \boxed{\frac{1}{6}}$$

2.5 points

4°. $I = \int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ avec
$D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x^2+y^2 \le 1\}$

On passe évidemment en coordonnées polaires :

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}dr = \frac{\pi}{2} \times (-\frac{1}{2}) \ln(1+r^2)\rfloor_0^1$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{4}\ln 2}$$ 2.5 points

5°. $I = \int\int_D (1-x^2-y^2)\ dxdy$ avec
$D = \{(x,y)/\ x \ge 0\ ;\ y \ge 0\ ;\ x^2+y^2 \le 1\}$

On passe encore en coordonnées polaires :

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^1 (1-r^2)rdr = \frac{\pi}{2} \times \lfloor \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \rfloor_0^1$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{8}}$$ 2 points

II. 5 points.

Soit $I = \int\int_D \exp(\frac{y}{x+y})\ dxdy$ avec
$D = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 1\ ;\ 0 \le y \le 1\ ;\ x+y \le 1\}$

Calculer I en effectuant le changement de variables
$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \dfrac{y}{x+y} \end{cases}$$

Notons $\phi(u,v)$ la fonction de changement de variables.
D'après ce qui précède, on a facilement $\begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$
et le jacobien vaut u. 2 points

Nous cherchons le domaine Δ de telle sorte que $\phi(\Delta) = D$. Puisque $0 \le x+y \le 1$, alors il est clair que $0 \le u \le 1$. Par ailleurs, $x, y \ge 0 \Rightarrow y/(x+y) \le 1$ et donc $0 \le v \le 1$. Ainsi, $\Delta = [0,1]^2$ 2 points

$$I = \int_0^1 \int_0^1 e^v u\ dudv = \boxed{(e-1)/2}$$ 1 point

III. 4 points.

Il s'agit d'un exercice traité en TD!!

1°. $\mathcal{P}$ est le quart de plan supérieur droit et D_n le quart de cercle supérieur droit centré en O et de rayon n
1 point

2°. $I_n = \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})$ 1 point
$I = \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$ 1 point

3°. $I = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx\right)^2$ et donc l'intégrale cherchée vaut $\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ 1 point