MATHEMATIQUES CR N°5 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année FA - 2008/2009 - Durée : 1h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Calculatrices interdites.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

On considère la fonction 2π-périodique, impaire, définie par $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

1°. Donner l'allure de sa courbre représentative.

C'est une fonction en dent de scie (que je ne reproduis pas ici) $\boxed{\text{1 point}}$

2°. Par imparité, $a_n = 0$ $\forall n$ et $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = -2\dfrac{(-1)^n}{n}$ en intégrant par parties. $\boxed{\text{3 points}}$

3°. Etudier la convergence de la série numérique de terme général $u_k = \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ puis appliquer, en justifiant, le théorème de Dirichlet pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

C'est une série alternée convergente $\boxed{\text{1 point}}$

Le théorème de Dirichlet s'applique car la fonction f est de classe C^1 par morceaux ; en particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{1 point}}$

Appliquons le théorème de Dirichlet en $x = \pi/2$ (ailleurs il donne $0 = 0$). $\sin(n\pi/2) = 0$ pour les termes pairs et ± 1 pour les autres. On peut donc ré-indexer la série en posant $n = 2k + 1$. On trouve alors

$$S(\pi/2) = f(\pi/2) \iff 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iff \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \quad \boxed{\text{3 points}}$$

4°. Appliquer le théorème de Parseval pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ en justifiant de sa convergence.

L'énergie du signal vaut $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \dfrac{\pi^2}{3}$. D'après le théorème de Parseval, $\dfrac{\pi^2}{3} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} \iff \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ ce que nous savions déjà... $\boxed{\text{3 points}}$

5°. On effectue une intégration par parties :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[F(x)\cos(nx)\right]_0^{2\pi} + \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin(nx)dx$$

Le crochet est nul et l'on a donc $b_n(F) = \dfrac{\pi}{n}a_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{\text{2 points}}$

De la même façon, $a_n(F) = -\dfrac{\pi}{n}b_n(f)$ $\boxed{\text{2 points}}$

Enfin, le coefficient $a_0(F)$ est à calculer à part.

On applique ces formules à la fonction $F(x) = x^2/2$ qui est la primitive de la fonction de départ $f(x) = x$ $\boxed{\text{2 points}}$

Orthographe et qualité de la rédaction : $\boxed{\text{2 points}}$