MATHEMATIQUES CR N°6

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2008/2009 - Durée : 1h - Le 28/05/09

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 7 points

1°. Soit $f(x,y) = \sin x \times e^{x(y-1)}$. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ puis démontrer que $f(x,y)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

2°. Soit $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Déterminer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ puis démontrer que $g(x,y)$ vérifie l'équation

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = -g$$

Calculer le laplacien Δg de g en (x,y)

II. 8 points.

Déterminer, en justifiant et en rédigeant votre réponse, les extrema des fonctions ci-dessous :

1°. $f(x,y) = x^2 + y^4 - 2y^2$ 2°. $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x$

III. 6 points.

On considère un champ électrique $\overrightarrow{E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} E_1(x,y,z) \\ E_2(x,y,z) \\ E_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ avec

$E_1(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2yz}$, $E_2(x,y,z) = \dfrac{1}{xy^2z}$, $E_3(x,y,z) = \dfrac{1}{xyz^2}$

1°. Calculer rot $\overrightarrow{E}$

2°. Montrer qu'en posant $V(x,y,z) = \dfrac{1}{xyz}$ on a $\overrightarrow{E} = -\text{grad } V$

On dit que $\overrightarrow{E}$ dérive du potentiel V.

3°. La distribution de charge au point (x,y,z) est une fonction notée $\rho(x,y,z)$ qui représente la quantité de charges électriques par unité de volume. On admet que cette fonction ρ vérifie l'équation

$$\text{div } \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Calculer div $\overrightarrow{E}$ et en déduire l'expression de $\rho(x,y,z)$.

4°. Montrer que

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

où Δ représente le laplacien.