MATHEMATIQUES CR N°6 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 2nde année par apprentissage - 2008/2009

- Durée : 1h - Le 28/05/09

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points

1°. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \times e^{\bullet} + \sin x \times (y-1)e^{\bullet}$ $\boxed{\text{1 point}}$
$\frac{\partial f}{\partial x} = x \sin x \times e^{\bullet}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x^2 \sin x \times e^{\bullet}$
$\boxed{\text{0.5 point}}$ et l'on voit que l'équation est vérifiée
$\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ $\boxed{\text{1 point}}$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$
En effectuant le calcul, on voit que l'équation est vérifiée $\boxed{\text{0.5 point}}$ et par ailleurs,
$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 9 points.

Déterminer, en justifiant et en rédigeant votre réponse, les extrema des fonctions ci-dessous :

1°. $f(x,y) = x^2 + y^4 - 2y^2$

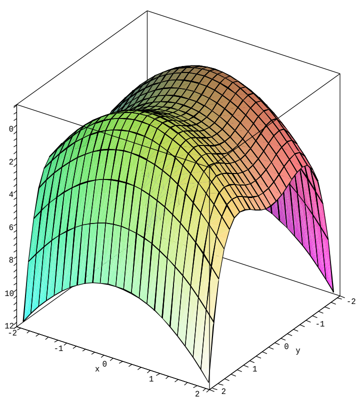
Déterminons les points critiques de f :
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y = 4y(y-1)(y+1)$ $\boxed{\text{1 point}}$
Les deux dérivées s'annulent simultanément ssi $x = 0$ et $y = 0, 1, -1$. Il y a donc trois points critiques $\boxed{\text{1 point}}$

Pour chacun ses points, déterminons la matrice hessienne :

$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Pour chaque point, la matrice est déjà diagonale et il suffit de lire les valeurs propres sur la diagonale :

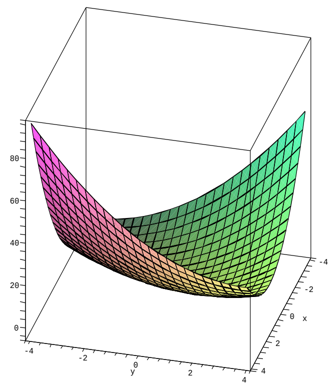
En $(0,0)$, les valeurs propres sont 2 et -4. Il s'agit donc d'un point selle. $\boxed{\text{1 point}}$
En $(0,1)$, les valeurs propres sont 2 et 8. Il s'agit donc d'un minimum.
En $(0,-1)$, les valeurs propres sont 2 et 8. Il s'agit donc d'un minimum. $\boxed{\text{1 point}}$



2°. $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y + 4$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x$
La seconde équation s'annule ssi $x = y$ et la première devient alors $2x + 4$ qui s'annule en -2. Le seul point critique est donc $(-2,-2)$ $\boxed{\text{1 point}}$
En ce point, la matrice hessienne est :

$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont, après calcul du polynôme caractéristique, $3 \pm \sqrt{5}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Comme elles sont > 0, le point $(-2,-2)$ est un minimum strict $\boxed{\text{1 point}}$



III. 5 points.

On considère un champ électrique $\overrightarrow{E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} E_1(x,y,z) \\ E_2(x,y,z) \\ E_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ avec

$E_1(x,y,z) = \frac{1}{x^2yz}, \quad E_2(x,y,z) = \frac{1}{xy^2z}, \quad E_3(x,y,z) = \frac{1}{xyz^2}$

1°. On trouve $\operatorname{rot} \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

2°. $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-1}{x^2yz}$. On en déduit la relation par permutation circulaire $\boxed{\text{1 point}}$

On dit que $\overrightarrow{E}$ dérive du potentiel V.

$\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = \frac{-2}{xyz}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right]$

3°. En appliquant le résultat précédent, on obtient immédiatement : $\rho(x,y,z) = \frac{-2\epsilon_0}{xyz}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right]$
$\boxed{\text{1 point}}$

4°. $\Delta V = \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial z^2}$ En effectuant le calcul, le résultat est évident $\boxed{\text{1.5 points}}$