R&T 1ère année - **MATHEMATIQUES DS N°1 - Corrigé**
2005/2006 - Lundi 23 Janvier 2006 - Durée 2h

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrice interdite.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 5 points.

1°. $F(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{x+1}$
$= \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1})$
La fraction a deux pôles simples 1 et -1 : pour calculer α et β, on utilise le théorème des résidus :
$\alpha = \beta = x/(2x)\rfloor_1 = 1/2$

2°. $F(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

possède une partie entière que l'on calcule en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$F(x) = x + 1 - \frac{x}{(x-1)(x-2)}$$

On décompose alors la seconde fraction qui possède deux pôles simples 1 et 2 et le théorème des résidus donne :

$$F(x) = x + 1 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$

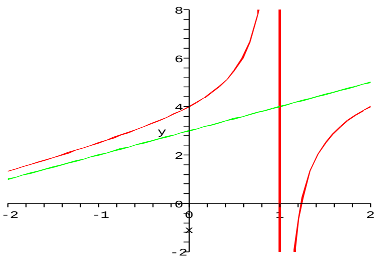
II. 17 points.

1°. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2} > 0$ car le numérateur n'a pas de racines. La fonction est donc croissante sur son domaine de définition.
$f''(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^3}$ qui est positive si $x < 1$ et négative sinon. La fonction est donc convexe avant 1 et concave après. Il n'y a pas de point d'inflexion puisque 1 n'appartient pas au domaine de définition.

On a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

La droite $\Delta : y = x + 3$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ (à vous de faire le calcul).



2°. $g(x) = \dfrac{1}{x}e^{-1/x}$ $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

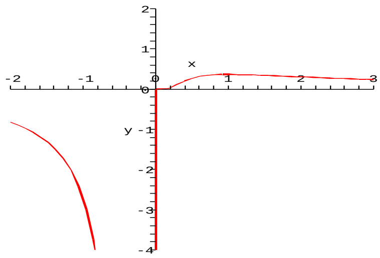
$g'(x) = \dfrac{1-x}{x^3}e^{-1/x}$

$g'(x)$ est du signe de la fraction. Un tableau de signe montre alors que $g'(x) > 0$ si $x \in]0,1[$ et négative à l'extérieur de cet intervalle. On en déduit que $g(x)$ est croissante sur $]0,1]$.

$g''(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^5}e^{-1/x}$

Les zéros de $2x^2 - 4x + 1$ sont $1 \pm \sqrt{2}/2$ qui sont les abscisses des 2 points d'inflexions de la courbe : $g''(x)$ est du signe du numérateur si $x > 0$ et du signe contraire si $x < 0$. Ainsi, $g(x)$ est convexe si
$x \in]0, 1 - \sqrt{2}/2] \cup [1 + \sqrt{2}/2, +\infty[$

Enfin, (Oy) est asymptote verticale et (Ox) asymptote horizontale en $+\infty$. La pente de la demi-tangente en 0^+ est nulle.



III. 25 points.

Le corrigé viendra plus tard. Calculer :

1°. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\ln x}$

2°. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\ dx$

3°. $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{t}}dt$ en posant $u = \sqrt{t}$

4°. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos 2t}dt$ en posant $u = \cos t$

5°. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2 + x + 2}{x^2(1+x^2)}dx$

6°. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}dx$

7°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

8°. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\ dx$

9°. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ en posant $u = e^x$