MATHEMATIQUES DS N°1 - CORRIGE
R&T Saint-Malo - 1ère année - 2007/2008 - Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.
L'exercice VI est plus difficile ; il est conseillé de le traiter en dernier.

I. 2 points.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$ $\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})=\sin x$

$$\iff \cos(2x-\pi/3)=\cos(\pi/2-x)$$
$$\iff \begin{cases} 2x-\pi/3=\pi/2-x+2k\pi \\ 2x-\pi/3=-\pi/2+x+2k\pi \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=5\pi/18+2k\pi/3 \\ x=-\pi/6+2k\pi \end{cases} \quad \boxed{\text{1 point}}$$

Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont alors
$\mathcal{S}=\{\dfrac{5\pi}{18},\dfrac{17\pi}{18},-\dfrac{7\pi}{18},-\dfrac{\pi}{6}\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 2 points.

Mettre sous forme algébrique :

1°. $i(2+i)^2=-4+3i$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\dfrac{13}{3-2i}-\dfrac{2}{1+i}=3+2i-1+i=2+3i$ $\boxed{\text{1 point}}$

III. $\boxed{\text{1 point}}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{z}=2z+1-i$

On pose $z=a+ib$. L'équation est équivalente à
$a-ib=2a+2ib+1-i \iff a=-1; b=1/3$
$\mathcal{S}=\{-1+i/3\}$

IV. 4 points.

Déterminer le module et l'argument des complexes suivants :

1°. $-2-2i=2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2008}=\left(\dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{2008}$
$=\left(e^{i\pi/2}\right)^{2008}=e^{502\times 2i\pi}=1$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

3°. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}\right)^4=\left(\dfrac{2e^{i\pi/3}}{2\sqrt{2}e^{-i\pi/6}}\right)^4$
$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$ $\boxed{\text{1.5 points}}$

V. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1°. $iz^2+(1-4i)z-1+3i=0$

$\Delta=(1-4i)^2+4(1-3i)i=-3-4i$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

On cherche l'une des racines carrées de Δ. Posons $\delta=\alpha+i\beta$. De $\delta^2=\Delta$ on a :
$\alpha^2-\beta^2=-3$, $\alpha\beta=-2$ et $\alpha^2+\beta^2=5$

Ainsi, $\alpha=\pm1$ et $\beta=\pm2$. Par ailleurs, α et β sont de signes contraires, donc : $\delta=1-2i$ et $\delta'=-1+2i$ sont les deux racines carrées recherchées $\boxed{\text{1 point}}$

On en déduit les racines $(-b\pm\delta)/2a$: $\mathcal{S}=\{3+i;1\}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

2°. $\dfrac{1}{2}z^2-(1+i)z+3i=0$

$\Delta=(1+i)^2-4\times 3i/2=2i-6i=-4i$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

On voit facilement que $\Delta=(2e^{-i\pi/4})^2$ et l'on a donc $\delta=\sqrt{2}(1-i)$ $\boxed{\text{1 point}}$
Ainsi, les solutions sont
$\mathcal{S}=\{(1+\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2});(1-\sqrt{2})+i(1+\sqrt{2})\}$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

VI. $\boxed{\text{2 points}}$

Soit $\theta\in]-\pi,\pi]$ et $n\in\mathbb{N}$. On pose
$z=(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$

Déterminer le module et l'argument de z en fonction de n et θ.

L'idée est de mettre l'expression dans la parenthèse sous forme exponentielle. Il faut donc modifier l'expression pour obtenir quelque chose de la forme $\cos\bullet+i\sin\bullet$ et pour ce faire, il faut faire disparaitre le 1 : On doit utiliser les formules de duplication de cos et sin.

$z=(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}+2i\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2})^n$
$=\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^n\times e^{in\theta/2}$ Comme $\theta\in]-\pi,\pi]$, $\theta/2\in]-\pi/2,\pi/2]$ et donc $\cos(\theta/2)>0$. Par suite,

$|z|=\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^n$ et $\arg z=\dfrac{n\theta}{2}$

VII. 6 points.

Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :

1°.
$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-4}=-1/2$$
$\boxed{\text{0.5 point}}$

2°.
$$\lim_{x\to4}\frac{x-2}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to4}\frac{x-2}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{x-4}=\pm\infty$$
En 4^+ la fonction tend vers $+\infty$.
En 4^- la fonction tend vers $-\infty$.
$\boxed{\text{0.5 point}}$

3°. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3x^4-2x+1)=\lim_{x\to-\infty}3x^4=+\infty$ $\boxed{\text{0.5 point}}$

4°. $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to0}e^{\ln(1+x)/x}$
C'est une forme indéterminée de type 1^∞. Pour déterminer la limite de $\ln(1+x)/x$, on applique la règle de l'Hospital ; cette expression a alors la même limite que $\dfrac{1}{1+x}$ qui tend vers 1 en 0. La limite recherchée vaut donc $\boxed{e}$ et cette question vous rapporte $\boxed{\text{1 point}}$

5°.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1})}{x+1-2x+1}$$
$=-\infty$ $\boxed{\text{1 point}}$

$6°.\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})$

Si l'on utilise le théorème des gendarmes, nous avons l'inégalité $-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})| \leq \sqrt{x}$ qui ne permet pas de conclure car le membre de gauche tend vers $-\infty$ et celui de droite vers $+\infty$. C'est donc la règle de l'Hospital qu'il faut utiliser une nouvelle fois :

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1/x^2)\cos(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = 0 \ \boxed{\text{1 point}}$$

$7°.\ \lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}}{1/x}$

On peut alors utiliser le théorème de l'Hospital :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1/x^2)e^{1/x} + 1/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{1/x}}{1} = 0$$

$\boxed{\text{1.5 points}}$