MATHEMATIQUES DS N°1 - Corrigé

R&T Saint-Malo - 1ère année - Durée : 2h - *2008/2009*

I. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$ les équations trigonométriques suivantes :

1°. $\cos(x+\frac{\pi}{6}) = \cos(2x-\frac{\pi}{3})$

$\iff \begin{cases} x = \pi/2 + 2k\pi \\ x = \pi/18 + 2k\pi/3 \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont

$\{\pi/2; \pi/18; 13\pi/18; -11\pi/18\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\sin(2x) = \sin(3x-\frac{\pi}{2})$

$\iff \begin{cases} x = \pi/2 + 2k\pi \\ x = 3\pi/10 + 2k\pi/5 \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont

$\{\pi/2; 3\pi/10; 7\pi/10; -9\pi/10; -\pi/10; -\pi/2\}$ $\boxed{\text{1 point}}$

II. 3 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$

En posant $z = a + ib$ et en injectant dans l'équation, on obtient le système : $\begin{cases} a^2 - b^2 - 4a - 5 = 0 \\ b(a+2) = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{1 point}}$

de la seconde équation, on tire $b = 0$ ou $a = -2$. Si $b = 0$, la première équation est $a^2 - 4a - 5 = 0$ qui a comme solutions -1 et 5. Si $a = -2$, l'équation devient $b^2 = 7$ d'où $b = \pm\sqrt{7}$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{-1; 5; -2+i\sqrt{7}; -2-i\sqrt{7}\}$

$\boxed{\text{2 points}}$

III. 3 points.

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°. $(1+i)(2-3i) = 2 - 3i + 2i - 3 = 5 - i$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\dfrac{(1+2i)^2}{2-i} = -2 + i$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $\dfrac{1}{(1+i)^2} = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$ $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 5 points.

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants :

1°. $-3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = \sqrt{2}e^{i2\pi/3}$ $\boxed{\text{2 points.}}$

3°. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2009} = \left(\dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{2009} = e^{i\pi/2} = i$

$\boxed{\text{2 points}}$

V. 3 points.

1°. Il faut faire le calcul sous forme algébrique. En posant $\delta = \alpha + i\beta$, on voit que δ est une racine carrée de $24 + 10i$ ssi $\delta^2 = 24 + 10i$.

Après calculs, on trouve $\delta = 5 + i$ ou $\delta = -5 - i$. $\boxed{\text{1 point}}$

En élevant ce complexe au carré, on retrouve bien $24 + 10i$.

2°. De la même façon, on trouve

$\delta = \pm\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{26}} + i\sqrt{-10+2\sqrt{26}}\right)$ $\boxed{\text{2 points}}$

VI. 2 points.

On peut écrire

$z = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} - \sqrt{2} = \sqrt{2}e^{3i\pi/8}\left[e^{3i\pi/8} - e^{-3i\pi/8}\right]$

$z = \sqrt{2}e^{3i\pi/8} \times 2i\sin\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{8}e^{7i\pi/8}$

Ainsi, $|z| = \sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{8}$ et $\arg z = \dfrac{7\pi}{8}$ $\boxed{\text{2 points}}$

Ou bien, $|z| = \sqrt{(-1-\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

Mais cette façon de faire ne permet pas le calcul de l'argument.