MATHEMATIQUES DS N°1 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 2009/2010

Tout document interdit.
Calculatrices : seule FX180P autorisée.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$ les équations :

1°. $\cos(2x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$

$$\iff \begin{cases} 2x = x + \pi/3 + 2k\pi \\ 2x = -x - \pi/3 + 2k\pi \end{cases}$$
$k \in \mathbb{Z}$
$$\iff \begin{cases} x = \pi/3 + 2k\pi \\ x = -\pi/9 + 2k\pi/3 \end{cases}$$

Il s'agit des solutions dans $\mathbb{R}$. Afin de trouver les solutions dans $]-\pi,\pi]$, il est nécessaire de donner à k des valeurs entières successives jusqu'à obtenir les mêmes mesures principales des angles :
Considérons la première équation. Si $k = 0$, $x = \pi/3$ et lorsque k varie, $2k\pi$ correspond à un tour de cercle complet, de sorte que seul $k = 0$ donne une solution dans $]-\pi,\pi]$. De la même façon avec la seconde équation, $k = 0$ donne $x = -\pi/9$, $k = 1$ donne $5\pi/9$ et $k = -1$ donne $-7\pi/9$. Il s'agit à chaque fois de mesures principales. Toutes les autres valeurs de k donnent une mesure principale déjà calculée. Les solutions dans $]-\pi,\pi]$ sont donc $\{\pi/3; -\pi/9; 5\pi/9; -7\pi/9\}$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) \iff \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x)$

$$\iff \begin{cases} x - \pi/3 = 2x + 2k\pi \\ x - \pi/3 = -2x + 2k\pi \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -\pi/3 + 2k\pi \\ x = \pi/9 + 2k\pi/3 \end{cases}$$

De même que précédemment, on en déduit les solutions dans $]-\pi,\pi]$: $\{-\pi/3; \pi/9; -5\pi/9; 7\pi/9\}$ $\boxed{\text{2 points}}$

II. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1°. $2z - i\bar{z} = 2 - i$

Il ne s'agit pas d'une équation linéaire à cause de la présence d'un conjugué. Il faut poser $z = a + ib$ et développer, puis séparer partie réelle et imaginaire en invoquant le fait qu'un complexe est nul ssi partie réelle et imaginaire sont nulles. On obtient alors un système de 2 équations à 2 inconnues réelles :

$$2z - i\bar{z} = 2 - i \iff \begin{cases} 2a - b = 2 \\ 2b - a = -1 \end{cases}$$

La seconde équation donne $a = 1 + 2b$ et en injectant dans la première équation on obtient : $b = 0$ puis $a = 1$. Ainsi la seule solution est le complexe $z = 1$ $\boxed{\text{2 points}}$

2°. $z^2 + i\bar{z} - 1 = 0$
De même que ci-dessus, $z^2 + i\bar{z} - 1 = 0$
$\iff a^2 - b^2 + 2iab + ia + b - 1 = 0$
$\iff (a^2 - b^2 + b - 1) + ia(1 + 2b) = 0$
$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 + b - 1 = 0 \\ a(1 + 2b) = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $a = 0$ ou $b = -1/2$. Les deux cas sont à étudier.
Si $a = 0$, en injectant dans la première équation on trouve $b^2 - b + 1 = 0$.
C'est une équation du second degré qui n'a pas de solutions réelles ; ce cas est donc impossible.
Si $b = -1/2$, en injectant dans la première équation on obtient :

$a^2 - 1/4 - 1/2 - 1 = 0 \iff a^2 = 7/4 \iff a = -\sqrt{7}/2$ ou $a = \sqrt{7}/2$ (ne pas oublier les deux solutions!!!).

Ainsi, $\mathcal{S} = \{-\frac{\sqrt{7} + i}{2}; \frac{\sqrt{7} - i}{2}\}$ $\boxed{\text{2 points}}$

III. 3 points.

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°. $(1 + 2i)^2 = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $i(i + 2)(1 + 2i)^2 = -5 - 10i$ $\boxed{\text{1 point}}$

3°. $\frac{1 + 2i}{3 + i} = (1 + i)/2$ $\boxed{\text{1 point}}$

IV. 3 points.

Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants :

1°. $1 + i = [\sqrt{2}; \pi/4]$ $\boxed{\text{1 point}}$

2°. $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20} = \left(\frac{[2; \pi/3]}{[\sqrt{2}; -\pi/4]}\right)^{20} = [1024; -\pi/3]$
$\boxed{\text{2 points}}$

V. 4 points.

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1°. $z^2 + (3 - i)z + 2(1 - i) = 0$

$\Delta = 2i = [2; \pi/2]$; on en déduit alors immédiatement (de tête et sans calcul) que $\delta = [\sqrt{2}; \pi/4]$ est une racine carrée de Δ. Ainsi, les solutions sont $\mathcal{S} = \{-1 + i; -2\}$
$\boxed{\text{2 points}}$

2°. $z^2 + (i - 2)z + (i - 3) = 0$

$\Delta = 15 - 8i$ que l'on ne peut pas mettre simplement sous forme exponentielle. Il faut donc calculer δ sous forme algébrique. Posons alors $\delta = \alpha + i\beta$. De $\delta^2 = \Delta$, on a

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 15 \\ 2\alpha\beta = -8 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 17 \end{cases}$$

En ajoutant la première et la troisième équation, il vient $\alpha^2 = 16$ et donc $\alpha = \pm 4$, puis en soustrayant, on a $\beta^2 = 1$ donc $\beta = \pm 1$. Enfin la seconde équation montre que α et β sont de signe contraire. Ainsi, $\mathcal{S} = \{3 - i; -1\}$
$\boxed{\text{2 points}}$

VI. 2 points.

Soit $\theta \in]-\pi,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose
$z = (1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n$

Déterminer le module et l'argument de z en fonction de

n et θ.

L'idée est de mettre l'expression dans la parenthèse sous forme exponentielle. Il faut donc modifier l'expression pour obtenir quelque chose de la forme $\cos\bullet + i\sin\bullet$ et pour ce faire, il faut faire disparaitre le 1 : On doit utiliser les formules de duplication de cos et sin.

$z = (1+\cos\theta + i\sin\theta)^n = (2\cos^2\dfrac{\theta}{2} + 2i\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2})^n$
$= \left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^n \times e^{in\theta/2}$ Comme $\theta \in]-\pi,\pi]$,
$\theta/2 \in]-\pi/2,\pi/2]$ et donc $\cos(\theta/2) > 0$. Par suite,

$|z| = \left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^n$ et $\arg z = \dfrac{n\theta}{2}$