MATHEMATIQUES DS N°3 - CORRIGE

R&T Saint-Malo - 1ère année - 24/01/08 - 2007/2008 -

Durée : 2h -

Documents autorisés : une feuille A4 manuscrite recto/verso. Calculatrices interdites. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif et sans engagement.

I. 11 points.

Calculer :

1°. $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ $\boxed{1 \text{ point}}$

2°. $\int_0^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \rfloor_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ $\boxed{1 \text{ point}}$

3°. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx = 2e^{\sqrt{x}} \rfloor_1^4 = 2(e^2 - e)$ $\boxed{1 \text{ point}}$

4°. $\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\, dx = [x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)]\rfloor_0^{\sqrt{3}}$
$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$ $\boxed{1 \text{ point}}$

5°. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 \rfloor_1^e = \frac{1}{3}$ $\boxed{1 \text{ point}}$

6°. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x + 1)} = \int_1^{+\infty} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1})\, dx$
$=- \ln \left(\frac{t + 1}{t} \right) \rfloor_1^\infty = \ln 2$ $\boxed{2 \text{ points}}$

7°. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x} = 2 \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $\boxed{2 \text{ points}}$

8°. $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1 - x}} = 2 \int_0^{1/2} \frac{du}{1 - u^2} = \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| \rfloor_0^{1/2} = \ln 3$
$\boxed{2 \text{ points}}$

II. 8 points.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1°. $y' = -\frac{2xy}{1 + x^2}$

$\iff y'/y = -\frac{2x}{1 + x^2} \iff \ln y = -\ln(1 + x^2) + K$
$\iff y = \frac{k}{1 + x^2}$ avec $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{1 \text{ point}}$

2°. $y'(x + 3) = y + 1$

$\iff \frac{y'}{y + 1} = \frac{1}{x + 3} \iff \ln |y + 1| = \ln |x + 3| + K$
$\iff y = k(x + 3) - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{1 \text{ point}}$

3°. $x^2 y' - (2x - 1)y = 0$

$\iff y'/y = \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \iff \ln y = 2 \ln x - 1/x + K$
$\iff y = kx^2 e^{-1/x}$ avec $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{1 \text{ point}}$

4°. $y' + 2y = 1$

$\iff y = ke^{-2x} + 1/2$ avec $k \in \mathbb{R}$ $\boxed{1 \text{ point}}$

5°. $y' + 2y = \text{ch}\, x$

La solution de l'équation homogène est la même que dans l'exo précédent. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_0(x) = k(x)e^{-2x}$
$\Rightarrow y_0'(x) = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x}$
En injectant dans l'équation, il vient
$k'(x) = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-x})$ et donc $y_0(x) = \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$
La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{6}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$
$\boxed{2 \text{ points}}$

6°. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^{-x}$

La solution de l'équation homogène est
$z(x) = (\alpha x + \beta)e^x$
On va chercher une solution particulière sous la forme
$y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
En dérivant et en injectant dans l'équation, on trouve
$y_0(x) = \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 5)e^{-x}$
En ajoutant les deux, on obtient la solution générale
$\boxed{2 \text{ points}}$

III. 2 points.

On s'intéresse à la propagation du courant et de la tension dans une ligne de transmission (par exemple un câble coaxial). On note C et L les capacité et inductance linéïques de la ligne. On suppose que la ligne est sans perte et l'on note $U(x)$ et $I(x)$ la valeur de la tension et de l'intensité au point d'abscisse x.

On admet que $U(x)$ et $I(x)$ sont solutions de la même équation différentielle, appelée équation des lignes, et donnée par

$$\begin{cases} U''(x) + LC\omega^2\, U(x) = 0 \\ I''(x) + LC\omega^2\, I(x) = 0 \end{cases}$$

où ω représente la pulsation du courant.
On notera également $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

1°. Résoudre ces deux équations différentielles et en déduire $U(x)$ et de $I(x)$ en fonction de ω et c.

L'équation caractéristique est $r^2 + (\omega/c)^2 = 0$ dont les deux racines complexes sont $\pm\omega i/c$
En appliquant le cours, on a donc :
$V(x) = \alpha \cos(\omega x/c) + \beta \sin(\omega x/c)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$I(x) = \alpha' \cos(\omega x/c) + \beta' \sin(\omega x/c)$, $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$
$\boxed{1.5 \text{ points}}$

2°. Expliquer la forme des solutions obtenues.

Il s'agit de fonctions sinusoïdales Le courant et la tension forment donc des ondes sinusoïdales dans le câble. Nous reviendrons sur ce phénomène d'ici quelques leçons.
$\boxed{0.5 \text{ point}}$